

*Πτυχιακή Εργασία*

*της Δικαίου Παρασκευής/M2O11O77*

*με θέμα*

*« Αισθητικές και φιλοσοφικές θεωρίες  
της σχέσης μουσικής και μαθηματικών »*

*Επιβλέπων καθηγητής:  
Σιώψη Αναστασία*



## **ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

|                                                               |             |
|---------------------------------------------------------------|-------------|
| <u>Εισαγωγή.....</u>                                          | <u>σ. 3</u> |
| <u>Κεφάλαιο Πρώτο : « Η μουσική και τα μαθηματικά » .....</u> | <u>σ.6</u>  |
| <u>Κεφάλαιο Δεύτερο: « Η Πυθαγόρεια Σχολή »</u>               |             |
| 2.1 <u>Ιστορική αναδρομή .....</u>                            | <u>σ.18</u> |
| 2.2 <u>Οι θεωρίες .....</u>                                   | <u>σ.20</u> |
| 2.3 <u>Η αρμονία των σφαιρών .....</u>                        | <u>σ.23</u> |
| <u>Κεφάλαιο Τρίτο: « Ιάnnης Ξενάκης »</u>                     |             |
| 3.1 <u>Ιστορική αναδρομή.....</u>                             | <u>σ.29</u> |
| 3.2 <u>Οι θεωρίες.....</u>                                    | <u>σ.31</u> |
| 3.3 <u>Η στοχαστική μουσική του Ιάnnη Ξενάκη.....</u>         | <u>σ.36</u> |
| <u>Επίλογος .....</u>                                         | <u>σ.43</u> |
| <u>Βιβλιογραφία .....</u>                                     | <u>σ.44</u> |

**... στους Χ. και Φ.**

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

*Μουσική είναι η απόλαυση που νοιώθει η ανθρώπινη ψυχή ,  
όταν μετράει χωρίς να ξέρει πως μετράει!*

*Gottfried Leibniz*

Έχετε αναρρωτηθεί ποτέ, τι πραγματικά είναι τα μαθηματικά; Πως τα υπολογίζουμε ή που μπορεί να υπάρχουν;

Για τους περισσότερους ανθρώπους, είναι μία άχαρη διαδικασία, μετρήματος ,υπολογισμού, κανόνων που διδασκόμαστε στο σχολείο, με αυστηρή λογική και ψυχρότητα. Είναι ο κλάδος που από νεαρή ηλικία, ακούμε, πως χωρίς αυτόν στη ζωή μας δε θα μπορέσουμε να κάνουμε τίποτα, μιας και όλα γύρω μας εξαρτώνται από αυτά.

Και τώρα θέλω να αναρρωτηθείτε, τι είναι η μουσική;

Η μουσική εμπεριέχει συναισθήματα, ηρεμία, συγκίνηση. Από τους αρχαίους αποτελεί το βασικό συστατικό για την παιδεία, την ηθική, την ψυχαγωγία. Όλοι λίγο πολύ κάποια φευγαλέα στιγμή της ζωής μας, έχουμε σιγοτραγουδήσει, έχουμε χτυπήσει ρυθμικά το μολύβι στο θρανίο σε κάποια ανιαρή ώρα μαθήματος, έχουμε συναντήσει ένα πιάνο . Η μουσική, όπως και τα μαθηματικά, είναι το τελευταίο μέρος της μνήμης που εγκαταλείπει τον άνθρωπο. Η μουσική είναι λοιπόν, ένας μεγάλος και διεξοδικός τρόπος έκφρασης , θεραπείας ή εξάσκησης του θυμητικού μας.

Τώρα, θα ήθελα να συνδέσετε τα μαθηματικά με τη μουσική, συνδυάζοντας στο μυαλό σας, όλες αυτές τις αντιθέσεις που αναφέραμε. Φαίνεται αδύνατο, ωστόσο είναι τόσο φανερό.

Χρειάστηκα πολλές ώρες μελέτης,για να συνειδητοποιήσω, πως τελικά η μουσική είναι τα μαθηματικά απλώς με άλλους συμβολισμούς . Από τα κλάσματα των πρώτων τάξεων του Δημοτικού, που εφαρμόζονταν άριστα στα ρυθμικά μοτίβα του ωδείου , μέχρι ολόκληρες στατιστικές θεωρίες εφαρμοσμένες σε σύγχρονα μουσικά έργα .

Αυτές τι θεωρίες αλλά και τη φιλοσοφία αυτής της ιδιόμορφης σχέσης , θα προσπαθήσω να σας παρουσιάσω στα επόμενα κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο, θα γνωρίσουμε τη σχέση της μουσικής και των μαθηματικών από τα αρχαία ελληνικά χρόνια μέχρι και τον 20ο αιώνα.

Μερικές από τις πιο γνωστές θεωρίες σήμερα, βασίζονται σε αυτή τη σχέση και είναι διατυπωμένες πολύ νωρίτερα από τον χρόνο που νομίζουμε εμείς. Το μουσικό διάστημα είναι κάτι που απασχολεί τον τομέα της μουσικολογίας, πολύ πριν από την εμφάνιση και οριστικοποίηση της Δυτικής μουσικής. Για παράδειγμα η πρώτη νύξη περί μουσικού διαστήματος, γίνεται από τον Αριστόξενο " *Διάστημα εστί το υπό δύο φθόγγων ωρισμένον , μη την αυτήν τάσιν έχόντων*"<sup>1</sup> . Με την πάροδο των αιώνων, οι προβληματισμοί ξέφυγαν από τα μουσικά διαστήματα και απασχόλησαν κι άλλους τομείς, όπως τη φυσική, την αστρονομία ακόμα και την πληροφορική.

Ο πρώτος που επιχειρεί να συνδέσει τη μουσική με την αστρονομία, είναι ο Πυθαγόρας ο Σάμιος. Γεννήθηκε το 572 π.Χ<sup>2</sup> στη Σάμο , εξ'ού και το όνομά του, και ήταν γόνος αριστοκρατικής οικογένειας, ένας παράγοντας που τον βοήθησε αργότερα να ταξιδέψει σε πολλές χώρες του τότε γνωστού κόσμου και να ασπαστεί πολλές απο τις ιδέες και φιλοσοφίες που γνώρισε. Μαθήτευσε κοντά στον φιλόσοφο Θαλή στη Μίλητο και ίσως αυτός να εμφύτευσε το πάθος των μαθηματικών και του στοχασμού στο νεαρό Πυθαγόρα. Το 530 π.Χ εγκατέλειψε τη Σάμο λόγω του τυρρανικού

1 Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, « Το μουσικό διάστημα κατά τον Αριστόξενο» [ PDF], από τον ιστότοπο *Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών* ( <http://users.uoa.gr/~hspyridis/diastimaaristoxenos.pdf> ) , ημερομηνία προσπέλασης: 10-1-2019

2 Δεν υπάρχουν πηγές για την ακριβή ημερομηνία γέννησης του φιλοσόφου. Οι περισσότερες πραγματεύονται με ταξύ 5 70 π.Χ με 580 π.Χ

Βλ. Maor Eli, *Το Πυθαγόρειο θεώρημα -Μια ιστορία 4000 ετών*, μτφ.Αποστολόπουλος Νίκος, (Αθήνα, Κάτοπτρο, 2008), σ. 40

καθεστώς του Πολυκράτη και έτσι μεταναστεύει στην τότε ελληνοκατοικημένη περιοχή του Κρότωνα<sup>3</sup>, στη νότια Ιταλία όπου θα ιδρύσει την περίφημη Πυθαγόρεια σχολή η οποία αρχικά είχε περισσότερο πολιτικοθησκευτικό στόχο και στη συνέχεια ασχολήθηκε και με το πεδίο της επιστήμης και της έρευνας. Και όπως κάθε έντονη και χαρισματική προσωπικότητα, που τρέφει τον κόσμο με σκέψη που ίσως δε θα έπρεπε, απέκτησε αντιπάλους και εχθρούς. Χρόνια αργότερα μετά από ταραχές που ξέσπασαν στον Κρότωνά τόσο ο ίδιος όσο και οι μαθητές του, όσοι τουλάχιστον επέζησαν, σκορπίστηκαν σε διάφορα μέρη. Ο Πυθαγόρας μετοίκησε στο Μεταπόντιο όπου και πέθανε. Ακόμη όμως και μετά το θάνατό του οι Πυθαγόρειοι συνέχισαν τη δράση τους φτάνοντας μέχρι και την εποχή του Πλάτωνα.

Σήμερα αποτελεί μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές προσωπικότητες του κόσμου όπου ώθησε σε άλμα, τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, την αστρονομία, τη μουσική, αλλά και τη φιλοσοφία.

Ο Πυθαγόρας ήταν από τους πρώτους που πίστεψε και απέδειξε με μέσα της εποχής, πως τελικά η μουσική βρίσκεται παντού, όπως και τα μαθηματικά, και πως ακόμη και στους πλανήτες ανήκει μια χαρακτηριστική μελωδία, που απλώς η ακοή μας δεν φτάνει για να ακούσει. Ο Πυθαγόρας δημιουργεί την μεγάλη τετράς των μαθημάτων, το περίφημο *quadrivium*, στο οποίο συμπεριέλαβε και τη μουσική. Πρώτη ήταν η αριθμητική μετά η γεωμετρία, η μουσική και τέλος η αστρονομία. Η τετράς αυτή, που εξύψωσε ο Πυθαγόρας και μετέπειτα ο Πλάτωνας, αποτέλεσε βασικό οδηγό για την εκπαίδευση στο Δυτικό κόσμο ιδιαίτερα από τον Μεσαίωνα και μετά. Επιπλέον ήταν και ένα λόγος να γίνει αυτή συσχέτιση μεταξύ των αριθμών και των νοτών που φυσικά και δε σταματάνε στην αρχαία Ελλάδα, ούτε στο Μεσαίωνα. Από την Αναγέννηση και μετά, μιλάμε για χρυσή αναλογία, δηλαδή για μαθηματικά μοτίβα, μέσα σε έργα τέχνης με τέλει αναλογίες. Κι από την Αναγέννηση πάμε στο Ρομαντισμό και τον 20ο αιώνα, όπου επιτέλους η πληροφορία και τα τεχνολογικά μέσα, συμβάλλουν στην καλύτερη ανάλυση, μελέτη και κατανόηση όλων των επιστημονικών κλάδων. Επιπλέον στους δύο τελευταίους αιώνες, η γνώση είναι ελεύθερη για όλους, με αποτέλεσμα πολύ περισσότεροι να γνωρίσουν την ιδιόμορφη αυτή σχέση, αλλά και οι μελετητές να έχουν επιπλέον πρόσβαση σε πληροφορία.

Τεχνολογικά όμως, τον 20ο αιώνα τα πράγματα είναι ακόμη σταθερά και ήρεμα. Ναι μεν, υπάρχει μια απίστευτη εξέλιξη με την τεχνολογία, ωστόσο, βρισκόμαστε στην εποχή που ακόμη η τεχνολογία υπηρετεί την επιστήμη και όχι το αντίθετο. Κι αυτό το εκμεταλλεύεται ειλικρινέστατα και άψογα, ο Ιάννης Ξενάκης, με τον οποίο θα ολοκληρωθεί και αυτή η εργασία.

Ο Ιάννης Ξενάκης γεννήθηκε το 1922 στη Βράιλα της Ρουμανίας και ήταν ο πρωτότοκος γιος από τα τρία παιδιά του Κλέαρχου Ξενάκη και της Φωτεινής Πάυλου<sup>4</sup>. Τα παιδικά και εφηβικά του χρόνια τα έζησε στις Σπέτσες, χωρίς ιδιαίτερες παρέες, μέχρι που το 1938 μετακομίζει στην Αθήνα για να προετοιμαστεί για τις εξετάσεις στο Πανεπιστήμιο Αθηνών, όπου και τελικά πέτυχε στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Με το ξέσπασμα του πολέμου και ύστερα από ένα ατύχημα κατά τη διάρκεια μιας μάχης, φεύγει από την Ελλάδα και καταφέρνει να περάσει στο Παρίσι το 1947, όπου και εγκαθίσταται, ενώ εδώ κηρύσσεται λιποτάκτης και καταδικάζεται σε θάνατο. Μέχρι το 1974

3 Η περιοχή του Κρότωνα ανήκει στην ευρύτερη περιοχή της Καλαβρίας, μιας περιοχής που αποτέλεσε σταθμό της Μεγάλης Ελλάδας. Ιδρύθηκε το περίπου το 709 π.Χ σε ένα ασφαλές και προσβάσιμο λιμάνι του Ιονιού, πλεονέκτημα που βοήθησε το εμπόριο θαλάσσης. Οι ιστορικές μας αναφορές, μας λένε πως το Κροτώνε δημιουργήθηκε από τους Αχαιούς, κάτω από τις εντολές του Μισκέλλου. Ωστόσο η ίδρυση του συνδέεται και με την γέννηση του Ηρακλή, αν και η χρονολογία του ήρωα προηγείται της ίδρυσης της πόλεως. Το 530 π.Χ η πόλη υποδέχθηκε και φιλοξένησε τον Πυθαγόρα και μετέπειτα τη σχολή του, όπου έπαιξαν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της νοοτροπίας και ζωής της πόλης.

Βλ. «History of Crotona (Kroton) in Italy», από τον ιστότοπο: *Italy this way* (

<https://www.italythisway.com/places/articles/crotona-history.php>), ημερομηνία προσπέλασης: 5-5-2018

4 Ήταν κόρη βιομηχάνου από τη Βράιλα που καταγόταν από τη Λήμνο. Ήταν δεκαεφτά χρόνια μικρότερη από τον Κλέαρχο Ξενάκη και προτού παντρευτεί είχε σπουδάσει πιάνο και ξένες γλώσσες σε μία μονή, πιθανό στη περιοχή της Βράιλα. Πέθανε από μηνιγγίτιδα όταν ο Ιάννης ήταν πέντε ετών.

Βλ. Μάκης Σολωμός, *Ιάννης Ξενάκης: Το σύμπαν ενός ιδιότυπου δημιουργού*, μτφ Πλυτά Τίνα, (Αθήνα: Αλεξάνδρεια, 2008), σ.18

που θα φύγει από το Παρίσι, εξελίσσεται σε έναν ιδιοφυή μουσικό επιστήμονα. Συνδέει σχεδόν όλες τις θετικές επιστήμες με τη μουσική. Νόμους της φυσικής, μακροοικονομία, αρχιτεκτονικά σχέδια αλλά και αιώνιοι μαθηματικοί γρίφοι, εντάσσονται στις συνθέσεις του σε τέτοιο βαθμό, που προκαλεί αντιδράσεις για τον νεωτερισμό και την επαναστατική του σκέψη.

Για κάποιους σήμερα, το έργο του ακουστικά θεωρείται τουλάχιστον ακατανόητο. Σε αντίθεση με τον Coltrane ο Ξενάκης σου προσφέρει άπλετα την αβεβαιότητα ως προς το τονικό κέντρο. Είναι και η "μόδα" της εποχής άλλωστε. Σου δίνει όμως και την αίσθηση, πως αυτό που ακούς δεν υπάρχει εκεί από μόνο του, μόνο με νότες. Ξέρεις πως κάτι υπάρχει απο πίσω ακόμη κι αν δε μπορείς να το αντιληφθείς ακουστικά.

Στόχος λοιπόν, αυτής της πτυχιακής εργασίας, είναι να προσφέρει στον απλό αναγνώστη, αλλά και στον ερευνητή, την ευκαιρία να γνωρίσει, πτυχές αυτής της όμορφης αλλά και περίπλοκης σχέσης. Ξεκινώντας από τα απλά μαθηματικά, αυτά των κλασμάτων και των τυπικών μαθηματικών πράξεων, θα φτάσει σε σύγχρονες μαθηματικές θεωρίες και αποδείξεις, εφαρμοσμένες σε μουσικά έργα και στη μουσική θεωρία. Δεν στοχεύει τόσο στην απόλυτη κατανόηση των μαθηματικών θεωριών που θα παρουσιαστούν, όσο το πως αυτοί οι δύο κλάδοι κατάφεραν να μπουν ο ένας στον άλλον, με απόλυτη ακρίβεια, τόσο που να αγγίζουν την ύψιστη μορφή τέχνης.

Σαφώς υπήρξαν δυσκολίες κατά την έρευνα και συγγραφή της, διοτί οι πληροφορίες ήταν είτε μη έγκυρες, είτε χρειαζόμουν ειδική άδεια για πρόσβαση, είτε δεν μπορούσαν να διασταυρωθούν. Παρ' όλα αυτά, υπήρχαν εργαλεία και συγγράμματα που μου πρόσφεραν απεριόριστη βοήθεια και αποτέλεσαν βάση για έρευνα και αναζήτηση, ενώ πάνω σε αυτά συμπλήρωσα τη δομή αυτής της εργασίας. Βασικός οδηγός ήταν η ηλεκτρονική εγκυκλοπαίδεια Britannica.com, τα κείμενα από το έργο του Barker, A. *The science of Harmonics in classical Greece*, (Cambridge: Cambridge University Press, 2007), Jamie, J., *The music of the spheres*, (London: Abacus, 1995) οι ηλεκτρονικοί ιστότοποι Academia. Edu και Mendeley.com, με ακαδημαϊκά άρθρα από όλο το κόσμο, αλλά και άρθρα σε περιοδικές εκδόσεις όπως του Crocker, R., « Pthagorean mathematics and music », *Journal of Aesthetics and Art Criticism* (1964. Για το κεφάλαιο του Ξενάκη, σημαντική βοήθεια ήταν το σύγγραμμα του Μάκη Σολωμού, *Ιάννης Ξενάκης: Το σύμπαν ενός ιδιότυπου δημιουργού* (Αθήνα: αλεξάνδρεια, 2008), του Matossian Nouritza, *Iannis Xenakis*, (Paris: Fayard, 1981) αλλά και η έκδοση τυ 1986, αλλά και υλικό από προσωπικές του συνεντεύξεις όπως του Varga, Balint Andras, *Συνομιλίες με τον Ιάννη Ξενάκη*, (μτφ. Συμεωνίδου Αλέκα, Αθήνα: Ποταμός, 2004). Πέρα όμως από τη βοήθεια των συγγραμάτων θα ήθελα να ευχαριστήσω, την επιβλέπων καθηγήτρια Αναστασία Σιώπη, για τη πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση της, καθώς και για τον πολύτιμο χρόνο που μου διέθεσε και την οικογένειά μου για την υλική, ψυχολογική και οικονομική στήριξη όλο αυτό το καιρό.

Ευελπιστώ, να κατάφερα να μεταλαμπαδεύσω στο βαθμό που επιθυμούσα, όλο αυτό το πλούτο της γνώσης που γνώρισα και διδάχθηκα και να πρόσφερα στους αναγνώστες, ένα άρτια μουσικό ταξίδι στο κόσμο των αριθμών και των λαμπρών θεωριών.

Καλή ανάγνωση!

## Κεφάλαιο Πρώτο

### « Η μουσική και τα μαθηματικά »

*«Η μουσική είναι μαθηματικά με ήχο,  
τα μαθηματικά είναι βουβή μουσική.»*

*Édouard Herriot,  
Γάλλος πρωθυπουργός*

Κανείς δε μπορεί να φανταστεί τη σχέση μουσικής και μαθηματικών. Σαφώς, όλοι γνωρίζουν πως συνδέονται, αλλά οι περισσότεροι μένουν απλώς στη σχέση του ρυθμού ή του μέτρου ή ακόμη και των αρμονικών. Όμως τελικά, μετά από τόσους αιώνες και θεωρίες, φαίνεται πως αυτά τα δύο συμπορεύονται και αλληλεπιδρούν το ένα στο άλλο βαθύτερα και ουσιαστικότερα από αυτό που βλέπουμε. Τα μαθηματικά αποτελούν τη πιο αφηρημένη μορφή επιστήμης και η μουσική τη πιο αφηρημένη μορφή τέχνης. Κι ενώ το μεν πρώτο έγκειται στην έννοια, τις παραμέτρους και τη λογική αλήθεια και το δεύτερο στο συναίσθημα του ήχου και του ρυθμού, έχουμε μια σύνδεση από αρχαιοτάτων χρόνων και εννοώ φυσικά την Αρχαία Ελλάδα.

Η μουσική της αρχαίας Ελλάδας χωρίζεται σε έξι περιόδους. Η προϊστορική περίοδος (έως το 1100 π.Χ), η γεωμετρική περίοδος (1100 – 750 π.Χ), η αρχαϊκή περίοδος (750- 479 π.Χ), η κλασική περίοδος (479 – 306 π.Χ), η ελληνιστική περίοδος (306 – 30 π.Χ) και τέλος η Ρωμαϊκή περίοδος (30- 337 μ.Χ). Κατά την αρχαϊκή περίοδο έχουμε τη μεγαλύτερη κινητικότητα ως προς τα γράμματα και τις τέχνες. Η μουσική είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη ποίηση, από την οποία αντλεί και τον ρυθμό της. Παράλληλα αποτελούσε βασικό συστατικό της εκπαίδευσης των νέων μαζί με τα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, τη ρητορία και τη γυμναστική.

### ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ

Την περίοδο εκείνη ένας φιλόσοφος από την Σάμο, τη συσχετίζει για πρώτη φορά με τα μαθηματικά και την αστρονομία, θέτοντας την ως το ύψιστο μέσο για τη κάθαρση της ψυχής και του σώματος. Σημαντική θέση είχε και στη καθημερινή ζωή των ανθρώπων. Όλες οι υπάρχουσες αναφορές σε φιλοσοφικά, ιστορικά ή ποιητικά κείμενα, επιβεβαιώνουν πως δεν νοείτω εκδήλωση ή θρησκευτική τελετή που να διεξαγόταν χωρίς μουσική. Παράλληλα είχε θεϊκό χαρακτήρα αφού θεράπευε ψυχή και σώμα, καταπράυνε και ηρεμούσε τους νοσούντες.<sup>5</sup> Κι ενώ έχουμε τόσες πολλές και σημαντικές πηγές για να ρίξουμε μια κλεφτή ματιά στο παρελθόν, μας λείπει το κυριότερο. Η ίδια η μουσική. Όπως ήδη γνωρίζετε είναι ελάχιστα έως μηδαμινά τα μουσικά κείμενα που έχουμε στη κατοχή μας κι αυτό γιατί η μουσική τότε περνούσε προφορικά από γενιά σε γενιά. Επομένως πως γνωρίζουμε με βεβαιότητα για τη μορφή της μουσικής στην Αρχαία Ελλάδα;

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος εισάγει τη μουσική ως φιλοσοφικό εργαλείο, αλλά και ως μονάδα μέτρησης των αποστάσεων των πλανητών, θεωρία που θα επιβεβαιωθεί αιώνες αργότερα από τους

<sup>5</sup> Ο πατέρας της ιατρικής Ασκληπιός, δημιούργησε δικές του μουσικές και αρμονίες, για την θεραπεία των ψυχικών και συναισθηματικών διαταραχών.

Βλ. Λαπατάς, Κοσμάς Α., « Εισαγωγή στη μουσικοθεραπεία », από τον ιστότοπο *Academia. Edu.* ([https://www.academia.edu/11462850/%CE%95%CE%99%CE%A3%CE%91%CE%93%CE%A9%CE%93%CE%97\\_%CE%A3%CE%A4%CE%97\\_%CE%9C%CE%9F%CE%A5%CE%A3%CE%99%CE%9A%CE%9F%CE%98%CE%95%CE%A1%CE%91%CE%A0%CE%95%CE%99%CE%91](https://www.academia.edu/11462850/%CE%95%CE%99%CE%A3%CE%91%CE%93%CE%A9%CE%93%CE%97_%CE%A3%CE%A4%CE%97_%CE%9C%CE%9F%CE%A5%CE%A3%CE%99%CE%9A%CE%9F%CE%98%CE%95%CE%A1%CE%91%CE%A0%CE%95%CE%99%CE%91)), ημερομηνία προσπέλασης: 27-11-2018



αστρονόμους Μπόντε και Τίτιους<sup>6</sup>. Με τον Πυθαγόρα λοιπόν, ξεκινάει η πρώτη συσχέτιση των δύο αυτών κλάδων, όπου στάθηκε αφορμή και για άλλους αργότερα να την εξελίσσουν και να προσφέρουν νέες θεωρίες και αποδείξεις, όπως ο Αρχύτας Τάραντας.

Ο Αρχύτας γεννήθηκε στον Τάραντα το 428 π.Χ και άνηκε στη δεύτερη γενιά των Πυθαγορείων φιλοσόφων. Υπήρξε δάσκαλος πολλών μετέπειτα φιλοσόφων, και πέρα από την επιστημονική και φιλοσοφική του κλίση, επέδειξε τεράστια ικανότητα και ως στρατηγός.

Ασχολήθηκε με τη φιλοσοφία, τη μουσική, τα μαθηματικά αλλά και την αστρονομία, συνεισφέροντας πολλές σημαντικές ανακαλύψεις και θεωρίες κι αυτό επιβεβαιώνεται, αφού ο ίδιος ο Αριστοτέλης έγραψε μια ολόκληρη πραγματεία αποκλειστικά για αυτόν, με τίτλο *Η φιλοσοφία του Αρχύτα*<sup>7</sup>. Ο ίδιος είχε στενή επαφή με τον Πλάτωνα<sup>8</sup> και φημολογείται πως ήταν αυτός που μύησε τον Πλάτωνα στη πυθαγόρεια σκέψη και φιλοσοφία.

Ως απόφοιτος της Πυθαγόρειας σχολής, υποστήριζε πως τα μαθηματικά είναι το μυστικό για την κατανόηση του κόσμου. Εξ' ου και οι σημαντικές θεωρίες που ανέπτυξε στο κλάδο της γεωμετρίας<sup>9</sup>. Επίσης ο ίδιος αναφέρει για πρώτη φορά τις τρεις αναλογίες, την *αρμονική, την αριθμητική και τη γεωμετρική*.

Φιλοσοφικά, ο ίδιος τασσόταν προς δύο κατευθύνσεις, η μία υποστήριζε πως δε μπορεί πάντοτε μία αιτιολογία να ερμηνεύσει τα φυσικά φαινόμενα, και η άλλη πως ο οργανικός από τον ανόργανο κόσμο δεν έχει και τελικά τόσες μεγάλες διαφορές. Φιλοσοφίες που ακολούθησαν εν συνεχεία και άλλοι.

Μουσικά, άνηκε στους αυλιτές και μάλιστα φημιζόταν για τη δεξιότητά του. Από αποσπάσματα που έχουν διασωθεί, φαίνεται να έγραψε μια πραγματεία για τον αυλό με τίτλο «Περί αυλών»<sup>10</sup> και έθετε προβληματισμούς σχετικά με τους μουσικούς τόνους και για αυτό φαίνεται να διακρίνει τη μουσική σε γένη ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της, σε διατονικό, εναρμόνιο και χρωματικό<sup>11</sup>. Παράλληλα χάρη στις μαθηματικές του γνώσεις έκανε τη παρατήρηση πως ανάλογα με το μήκος ενός αυλού ο ήχος που παράγεται είναι άλλοτε οξύς και άλλοτε βαρύς. Ο Αρχύτας βελτίωσε με τις μαθηματικές του γνώσεις το κλάδο της μηχανικής καθώς και τη θεωρία *δράσης-αντίδρασης* που αιώνες αργότερα συνέβαλε στη δημιουργία πυραύλων.

Απεβίωσε το 347 π.Χ στον Τάραντα της Ιταλίας, αφήνοντας ένα πλούσιο συγγραφικό έργο, από το οποίο δυστυχώς έχουν διασωθεί μερικά αποσπάσματα.

Μαζί με τον Αρχύτα, από την πυθαγόρεια σχολή αποφοιτά και εστερνίζεται τις απόψεις και ο Αριστόξενος<sup>12</sup>.

Γεννημένος το 354 π.Χ, μαθητής του Αριστοτέλη και μεγαλωμένος στον Τάραντα, διατύπωσε τη θεωρία περί υπολογισμού των διαστημάτων, ο οποίος μπορεί να επιτευχθεί μέσα από τις μαθηματικές σχέσεις. Για τον Αριστόξενο, ο υπολογισμός δε πρέπει να βασίζεται στις αριθμητικές πράξεις, αλλά στην εκτίμηση του αυτιού. Δεν ενδιαφέρεται για τις μαθηματικές σχέσεις που μπορεί να υπάρχουν μέσα στη κλίμακα, ωστόσο ο ίδιος ορίζει τον μισό και ολόκληρο τόνο και

6 Βλ. Κεφάλαιο II «Η μουσική των σφαιρών»

7 Δυστυχώς, η πραγματεία αυτή δε κατάφερε να διασωθεί και το γνωρίζουμε από ελάχιστες αναφορές σε δικά του κείμενα ή άλλων φιλοσόφων.

Βλ. «Αρχύτας ο Ταραντίνος», από τον ιστότοπο *Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο* (<http://users.sch.gr/thafounar/Genika/problemGeometry/doublingCubeArchytas/archytas.html>), ημερομηνία προσπέλασης: 14-1-2019

8 Στην *Εβδομη Επιστολή* ο Πλάτωνας αποκαλύπτει πως, ο Αρχύτας τον έσωσε από τον τύρρανο των Συρακουσών, όπου ήθελε να τον σκοτώσει.

Βλ. Μτφρ. Η.Ε. Κορμπέτη, *Πλάτωνος Επιστολή Ζ'*. Εισαγωγή, μετάφραση, σημειώσεις. (Αθήνα: Στιγμή, 1997).

9 Το πιο γνωστό λυμένο πρόβλημα του Αρχύτα είναι το «Δήλιον πρόβλημα». Το δήλιον πρόβλημα ήταν ο διπλασιασμός του κύβου, όπου τελικά επιτεύχθηκε χάρη στον Αρχύτα με τη χρήση του ημικυλίνδρου.

Βλ. Πρόκλου *Eucl. pol*, II 66, 14

10 Βλ. Αθήν. IV 184 e

11 Πτολ. Αρμ. I, 13, p. 3

12 «Aristoxenus of Tarentum», Donald James, *The chamber's encyclopaedia*, (London: George Newnes, 1961), Vol. 1, pp. 593

φτιάχνει μια κλίμακα , θέτοντας ως βάση το δωδέκατο του τόνου. Στη συνέχεια διαιρεί το διάστημα της ογδόης σε δώδεκα ίσα μέρη , τα οποία αποτελούν τους φθόγγους, οι οποίοι απέχουν ο ένας από τον άλλον, ένα ημιτόνιο. Με αυτή τη θεωρία , οι σύγχρονοι μουσικοί ερευνητές, υποστηρίζουν πως είναι ο δημιουργός της πρώτης συγκερασμένης κλίμακας.<sup>13</sup>

Επιπλέον , από τα κείμενα του συμπεραίνουμε πως ξεχώριζε ήδη, πολλά από τα ρυθμικά , αρμονικά και μελωδικά στοιχεία, που σε εμάς σήμερα είναι δεδομένα, όπως την εναρμόνιο δίσση και τη χρωματική, την άρση και θέση σε έναν ρυθμό, το τριημιτόνιο, το ημιτόνιο, τα πιθανά κλειδιά που μπορεί να δομείται μια μελωδία , τα μουσικά γένη και άλλα.

Ο ίδιος έγραψε πολλά θεωρητικά συγγράμματα περί αρμονίας και μουσικής, αλλά σήμερα διασώζονται μόνο δύο καθώς και μερικά αποσπάσματα από τα άλλα έργα του. Ο ίδιος μαζί με τον Πυθαγόρα αποτέλεσαν τα θεμέλια της σύνθεσης τόσο στους Βυζαντινούς, όσο και τους νεώτερους Δυτικούς χρόνους.

Ο Πλάτων , αποτελεί ένα μεγάλο κομμάτι της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας. Γεννήθηκε στην Αθήνα το 427 π.Χ. Ταξίδεψε στη Κάτω Σικελία και τον Τάραντα της Ιταλίας, όπου ήρθε σε επαφή με τους πυθαγόρειους φιλοσόφους και ασπάστηκε ένα πολύ μεγάλο κομμάτι των ιδεών και της φιλοσοφίας τους. Γι' αυτό και το 387 π.Χ που επιστρέφει στην Αθήνα, ιδρύει μια φιλοσοφική σχολή, γνωστή ως Ακαδημία Πλάτωνος , και διδάσκει όχι μόνο φιλοσοφία, αλλά μαθηματικά , μουσική , φυσικές και πολιτικές επιστήμες<sup>14</sup>.

Η θεωρίες του περί μουσικής, είχαν να κάνουν κυρίως με την ηθική και τη παιδεία και όχι τόσο με τα μαθηματικά. Ωστόσο η πεποίθηση του όπως την αποτυπώνει και ο ίδιος , ήταν πως στις μαθηματικές αρμονίες μπορεί κανείς να βρει την απάντηση για την ορθολογική οργάνωση του σύμπαντος. Πέρα από αυτό η πυθαγορικές του επιρροές εμφανίζονται και στο έργο του « Πολιτεία », όπου υποστηρίζει πως για να μπορεί ο άνθρωπος να προβεί στην ηθική και ψυχική ανωτερότητα, πρέπει να ασχοληθεί με τέσσερα συγκεκριμένα μαθηματα, τη γεωμετρία, την αριθμητική<sup>15</sup> , την αστρονομία και τη μουσική. Η μουσική για τον ίδιο ήταν κάτι το ιδεατό. Για αυτό στο έργο του *Τιμαίος*<sup>16</sup> αναφέρει τις πυθαγόρειες θεωρίες σχετικά με τη μουσική , ισχυριζόμενος πως ο Θεός όταν δημιουργούσε την ανθρώπινη ψυχή χρησιμοποίησε τις αναλογίες της πυθαγόρειας μουσικής κλίμακας. Ο Πλάτωνας σίγουρα δεν επικεντρώθηκε τόσο στη μαθηματική φύση της μουσικής, όσο στην εκπαιδευτική και ηθική πλευρά της , κάτι που ακολούθησε και στη συνέχεια ο Αριστοτέλης, σαν μαθητής του. Ωστόσο κατά τη πορεία του αποδείχτηκε πως δάσκαλος και μαθητής διαφώνησαν τεκμηριωμένα σε πολλά θέματα.

Απόγονος όλης αυτής της φιλοσοφίας περί μουσικής και μαθηματικών, ήταν και ο Ευκλείδης ( 325 – 265 π.Χ). Ο μεγάλος γεωμέτρης διατύπωσε μια θεωρία περί γεωμετρικών αποστάσεων των μουσικών διαστημάτων. Πως το έκανε αυτό;

Εφάρμοσε τα μουσικά διαστήματα πάνω σε ευθείες γραμμές , με τη μόνη διαφορά, πως , γεωμετρικά οι ευθείες γραμμές που παράγονται ως αριθμοί ορίζονται με δύο γράμματα ( ένα στην αρχή και ένα στο τέλος τους), εδώ ορίζονται με ένα γράμμα. Για παράδειγμα, το γνωστό σε όλους μας διαπασών διάστημα παράγεται από το ημιόλιο<sup>17</sup> και το επίτριτο . Για να μάθουμε το

13 Λεούση, Λίντα, *Ιστορία της ελληνικής μουσικής*, (Αθήνα : Άγκυρα, 2003), σ.68

14 Διογένης Λαέρτιος, *Βίοι καὶ γνῶμαι τῶν ἐν φιλοσοφίᾳ εὐδοκίμησάντων* , Βιβλίο Γ΄

15 Η θεωρία των αριθμών κατά τους αρχαίους χρόνους, ονομάζετο αριθμητική και η πρακτική της αριθμητικής, λογιστική. Αυτοί οι δύο τομείς, άνηκαν κατά τον Πλάτωνα, στον κόσμο των ιδεών.

Βλ. Παπαϊωάννου Ανδρέας , Μπαλάσκας Αλέξανδρος , Θούας Κωνσταντίνος, Σωτηρόπουλος Λουκάς, Κορφιάτης Πέτρος , « Η συμβολή του Πλάτωνα στα μαθηματικά », από τον ιστότοπο *9ο γενικό λύκειο Πάτρας* ( <http://9lyk-patras.ach.sch.gr/autosch/joomla15/phocadownload/platon.pdf> ), ημερομηνία προσπέλασης: 9-12-2018

16 Είναι ένα φιλοσοφικό σύγγραμμα *περί φύσεως* του Πλάτωνα, που τοποθετείται χρονικά μετά το έργο του « Πολιτεία» και πριν το έργο « Κριτίας». Έχει διαλογική μορφή και στον διάλογο συμμετέχουν ο Σωκράτης, ο Τιμαίος, ο Κριτίας και ο Ερμολύτης. Το θέμα του διαλόγου είναι είναι η δημιουργία του κόσμου , με βασικά εργαλεία έρευνας τη *λογική πιθανότητα* και την *αληθοφάνεια* Το έργο αποτελεί σημείο αναφοράς των ερευνητών της Χαμένης Ατλαντίδας , μιας και αποτελεί επίσημα την αρχαιότερη πηγή σε αυτή.

Βλ. Κάλφας Β. , *Πλάτων-Τιμαίος* [ pdf], Αθήνα: Εστία, 2014

17 Ημιόλιο ή ημιόλο , είναι αρχαιοελληνικός όρος που συναντάτε για πρώτη φορά στα γραπτά Ίππασου και του



αποτέλεσμα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τις αριθμητικές σχέσεις των διαστημάτων που το συνθέτουν, δηλαδή  $3/2 * 4/3 = 2$ . Παράλληλα ο Ευκλείδης με αυτό το τρόπο , δημιούργησε το τετράχορδο με τους δύο ακέραιους τόνους, δοαφορετικό από το Πυθαγόρειο, προς διευκόλυνση ,διότι η διαφορά ακουστικά δεν ήταν αντιληπτή. Με αυτό το τετράχορδο ο Ευκλείδης διατυπώνει και τον *Ευκλείδειο κανόνα* , ο οποίος αποδεικνυε πως όταν μια χόρδη πάλλεται ολόκληρη, τότε παράγει τον πιο βαρύ ηχητικά φθόγγο. Σε περίπτωση τώρα που τοποθετήσουμε ένα υπαγωγέα σε συγκεκριμένες θέσεις του κανόνα, τότε βλέπουμε πως παράγονται κατά σειρά και οι υπόλοιποι φθόγγοι.

Όμως πέρα από όλη αυτή τη μουσικομαθηματική φιλοσοφία που προσέφερε , ο Ευκλείδης ανακάλυψε και προσέφερε στον μετέπειτα κόσμο θεμελιακές σχέσεις που περιβάλλουν και περιλαμβάνουν τους ήχους, με αποτέλεσμα να θεωρείται θεμελιωτής αυτού που σήμερα ονομάζουμε ακουστική και είναι πλέον ένας ανεξάρτητος επιστημονικός κλάδος.

## ΕΛΛΗΝΙΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Προχωρώντας στην ιστορία φτάνουμε στους Αλεξανδρινούς χρόνους ή πιο σωστά Ελληνιστικούς χρόνους ( 323 π. Χ – 31 π.Χ) , με κέντρο πολιτισμού, γραμμάτων και τεχνών την Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Εκείνη τη περίοδο έχουμε ιστορικά δύο πρόσωπα που ξεχωρίζουν στον επιστημονικό κλάδο , την Υπάτια και τον Δίδυμο τον Αλεξανδρεΐς.

Ο Δίδυμος από την Αλεξάνδρεια υπήρξε, φιλόλογος , ρήτορας και μουσικός. Η συμβολή του στη μουσική υπήρξε καθοριστική. Μέχρι τότε κυριαρχεί η μουσική κλίμακα του Πυθαγόρα, που ναι μεν είχε μεγάλη μαθηματική ακρίβεια, αλλά οι διαχωρισμοί είναι λεπτομερές και η ανάλυση στο σύνολο της ήταν δύσκολη. Έτσι ο ίδιος δημιουργεί μια μαλακή μουσική κλίμακα ,με τους πρώτους λόγους των αρμονικών. Δηλαδή, 2:1 η οκτάβα , 3:2 5η καθαρή, 4:3 4η καθαρή και 5:4 3η μεγάλη. Με τον λόγο 9:8 που αντιστοιχεί στον μείζονα τόνο, σχηματίζονται το πρώτο πεντάχορδο , με επανάληψη του πάνω από την πέμπτη. Ως αποτέλεσμα προκύπτει η ακόλουθη κλίμακα:

| ΝΤΟ | ΡΕ  | ΜΙ  | ΦΑ  | ΣΟΛ | ΛΑ    | ΣΙ   | ΝΤΟ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-------|------|-----|
| 1   | 9:8 | 5:4 | 4:3 | 3:2 | 27:16 | 15:8 | 2   |

Αυτές είναι οι συχνότητες που προκύπτουν, ως προς τα διαστήματα τώρα έχουμε ως εξής:

| ΝΤΟ | ΡΕ  | ΜΙ   | ΦΑ    | ΣΟΛ | ΛΑ  | ΣΙ   | ΝΤΟ   |
|-----|-----|------|-------|-----|-----|------|-------|
|     | 9:8 | 10:9 | 16/15 | 9/8 | 9/8 | 10/9 | 16:15 |

Παρ' όλα αυτά η κλίμακα αυτή περιέχει λάθος όπως και η πυθαγόρεια, που ονομάζεται *κόμμα του Διδύμου ή συντονικό κόμμα* και είναι ο λόγος 81:80 .

Αφού μιλάμε για την Ανατολή, από την ερευνά μας δε θα μπορούσε να λείπει το Βυζάντιο. Κατά τον 2ο μ.Χ αιώνα, το Βυζάντιο φώτισε με το πολιτισμό του τόσο την Ανατολή, όσο και τη Δύση. Οι τέχνες , τα γράμματα αλλά και η μουσική κυριαρχούσαν ιδιαίτερα από τον 4ο μ.Χ αιώνα . Η Βυζαντινή μουσική που κατάφερε να φτάσει ως τις μέρες μας , απαρτίζεται από ελληνικά κείμενα ως μελωδία. Όλοι οι ιστορικοί συνάδουν πως η μουσική του Βυζαντίου είναι προϊόν εξέλιξης της αρχαίας ελληνικής μουσικής<sup>18</sup>.

Φιλόλαου, και αφορά κυρίως το ρυθμικό κομμάτι μιας μελωδίας. Αντιστοιχεί στον μαθηματικό λόγο 3:2 και περιγράφει στη σημερινή Ευρωπαϊκή μουσική το διάστημα της καθαρής πέμπτης  
Βλ. « Hemiola, hemiola », Don Michael Randel, *The Harvard Dictionary of Music* , 4<sup>th</sup> edition, ( Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press, 2003 ), pp. 376

18 Baynes , Norman H. , *Βυζάντιο: Εισαγωγή στο βυζαντινό πολιτισμό*, μτφ. Σακάς Δημήτρης, ( Αθήνα: Παπαδήμας,

## BYZANTIO ΚΑΙ METABYZANTINH ΠΕΡΙΟΔΟΣ

Ο μουσικός και θεωρητικός Κλεωνίδης, που έζησε κατά τον 2ο μ.Χ αιώνα στο Βυζάντιο διαίρεσε το τετράχορδο σε 30 ίσα μέρη, εκ των οποίων τα 12 συνάδουν με τον τόνο και τα 6 με το ημιτόνιο. Το κλεωνίδιο τετράχορδο, όπως ονομάστηκε, αποτελείται από δύο τόνους και ένα ημιτόνιο ( $12+12+6=30$ ), που όμως κανένα από τα δύο δεν τηρεί το φυσικό διάστημα. Γι' αυτό και το κλεωνίδιο τετράχορδο ταίριαζε καλύτερα στους κανόνες της Βυζαντινής μουσικής, διαιρώντας το σε 28 μέρη και ο μείζονας τρόπος να ισοδυναμεί με 12 μέρη, τον ελάσσονα τρόπο με 9 και το ημιτόνιο με 7 ( $12+9+7=28$ ). Έτσι στη βυζαντινή μουσική αυτό θεωρείται το φυσικό τετράχορδο.

Κι όμως πέρασαν αρκετοί αιώνες, από τους Βυζαντινούς χρόνους, μέχρι να ξαναειπωθεί κάποια θεωρία σχετικά με την μουσική και τα μαθηματικά. Η πρώτη προσπάθει προσδιορισμού των διαστημάτων στη μεταβυζαντινή περίοδο, γίνεται από τον Χρύσανθο εκ Μαδυτών<sup>19</sup>.

Ο Χρύσανθος ήταν μανιώδης μελετητής της αρχαίας ελληνικής νοοτροπίας και ζωής. Εμπνευσμένος από τους πυθαγορείους αλλά και τον Αριστείδη Κοϊντιλιανό<sup>20</sup> συνδέει το αρχαιοελληνικό μουσικό πνεύμα με το σύγχρονο της εποχής του. Έτσι στη κλίμακα από το Κε – Κε' ο Χρύσανθος παρουσιάζει τις εξής μαθηματικές αντιστοιχίες

κε → ζω — ηη — πα — βου — γα — δα — κε'

**9216 - 8192 - 7776 - 6912 - 6144 - 5832 - 5184 - 4608**

, οι οποίες ταυτοποιούνται με τον πυθαγόρειο μαθηματικό Κανόνα

**9216/8192=9/8, 8192/7776=256/243, 7776/6912=9/8, 6912/6144=9/8,**

**6144/5832=256/243, 5832/5184=9/8 και 5184/4608=9/8.**

.Δηλαδή, σήμερα δεν είναι άλλη, από τη σκληρή διατονική κλίμακα της Βυζαντινής μουσικής. Στη συνέχεια ο ίδιος υπολόγισε με ακρίβεια την απόσταση των διαστημάτων όπως η φυσική τέταρτη (περιέχει 28 μόρια, δηλαδή με βάση τον άνωθεν πίνακα, το διάστημα αυτό καλύπτεται από 498 cents, δηλαδή κάθε μόριο από τα 28 υπολογίζεται στα  $498/28 \approx 17,7857$  cents).

Με άλλα λόγια, ο Χρύσανθος υπολογίζει τους λόγους της κλίμακας με βάση τη κλίμακα του Zarlino που θα δούμε παρακάτω.

Οι άλλοι δύο δάσκαλοι της Νέας Μεθόδου, ο Γρηγόριος Πρωτοψάλτης και ο Χορμούζιος Χαρτοφύλακας, ασχολήθηκαν εντονότερα με το πρακτικό κομμάτι της Βυζαντινής μουσικής. Επικεντρώθηκαν κυρίως στην ψαλμώδηση και στην δημιουργία νέων θέσεων.

Ο Χρύσανθος υποστήριξε πως η ανθρωπότητα, πρέπει να επιστρέψει στην αρχαία ελληνική σκέψη για αυτό και μετάφρασε στα λατινικά πολλά αρχαία ελληνικά συγγράμματα.

---

1983)

19 Μαζί με τον Γρηγόριο Πρωτοψάλτη και τον Χορμούζιο Χαρτοφύλακα είναι οι τρεις μεγάλοι δάσκαλοι της νέας Βυζαντινής μουσικής, , εισήγαγαν τη *Νέα Μέθοδο*, όπου αφορά το μουσικό σύστημα γραφής και στη πλειοψηφία του ισχύει μέχρι τις μέρες μας.

Βλ. Wellesz Egon, *A history of Byzantine music and hymnography*, 2<sup>nd</sup> edition, (Oxford: Clarendon Press, 1961)

20 Αρχαίος Έλληνας μουσικός που έζησε τον 3ο μ.Χ αιώνα και ασχολήθηκε κυρίως με τον ρυθμό και τη μελωδία, εξού και τα συγγράμματα *Περί μουσικής* όπου εκτείνονται σε τρία βιβλία. Παράλληλα το περιεχόμενο τους, έχει τόσο φιλοσοφικό όσο και αισθητικό χαρακτήρα.

Βλ. M L. West, *Αρχαία Ελληνική μουσική*, μτφρ. Στάθης Κομνηνός, (Παπαδήμας, Αθήνα, 1999), σελ. 347-348

## ΑΡΑΒΙΚΗ ΜΟΥΣΙΚΗ

Αραβική μουσική ονομάστηκε η μουσική των λαών του Ισλάμ, όπως της Περσίας, της Συρίας και της Βόρειας Αφρικής. Αν και φαίνεται να ξεκινάει και να διαδίδεται από το Ισλάμ και μετά, οι ρίζες της υπάρχουν αρκετά χρόνια πίσω.

Οι Άραβες, ήταν από τους πρώτους πολιτισμούς που ασχολήθηκαν με τις τέχνες και ιδιαίτερα με το κλάδο των θετικών επιστημών. Πολλά από τα μαθηματικά που ξέρουμε σήμερα, εξελίχθηκαν χάρη στη δική τους έρευνα. Πώς θα μπορούσε λοιπόν να λείπει από το πεδίο τους η μαθηματική φύση της μουσικής;

Από τον 9ο μέχρι και τον 13ο αιώνα έχουμε πολλές έρευνες για το τονικό σύστημα, με τη πιο γνωστή μορφή του, να ισχύει μέχρι και σήμερα. Δημιουργός του ο Αλ Φαράμπι<sup>21</sup>

Η έκταση της αραβικής κλίμακας υπολογίζεται σε δύο οκτάβες και είναι προϊόν υποδιαίρεσης της πρωτόγονης αραβικής οκτάβας σε εικοσιτέσσερα ίσα διαστήματα. Κάθε φθόγγος έχει τη δική του ονομασία και δεν επαναλαμβάνεται ούτε στις χαμηλές ούτε στις ψηλές οκτάβες. Για να συμβεί αυτό έπαιζε ρόλο η θέση του στην οκτάβα και η απόστασή του από τους "γειτονικούς" του φθόγγους. Η βαρύτερη οκτάβα, αντιστοιχεί στην ευρωπαϊκή μουσική από το Σολ κάτω από το πεντάγραμμα έως το Σολ μέσα στο πεντάγραμμα.

Η ονομασία των φθόγγων έχει ως εξής:

### Γεγκιάχ – Ουσαϊράν - Ιράκ - Ραστ, Δουγκιάχ - Σεγκιάχ – Τσαργκιάχ – Νεβά

Ωστόσο μέχρι και σήμερα οι θεωρίες για τα μεγέθη της θεμελιώδους κλίμακας της αραβικής μουσικής, διαφέρουν. Το πιο πιθανό, οι ίδιοι να βασίστηκαν στη πυθαγόρεια θεωρία με τα διαζευγμένα τετράχορδα, για την δημιουργία της κλίμακας τους, κι αυτό γιατί τη περίοδο εκείνη, οι Άραβες ήταν μελετητές των αρχαίων ελληνικών κειμένων.

Σήμερα η οκτάβα της Αραβικής μουσικής είναι χωρισμένη σε 25 ίσα διαστήματα<sup>22</sup> δηλαδή δύο τετράχορδα και έναν ολόκληρο τόνο, που έχουν αναδειχθεί με τη βοήθεια του λαούτου και του αυλού, όπως πρότεινε από τον 10ο αιώνα ο Αλ Φαράμπι. Αργότερα κάποιοι Άραβες θεωρητικοί, προσπάθησαν να καθορίσουν τον αραβικό τόνο με βάση τον κύκλο των πεμπτών και τη μονάδα μέτρησης γνωστή ως κόμμα<sup>23</sup>. Η κλίμακα της μουσικής της Συρίας είναι διαιρεμένη σε 53 ίσα διαστήματα, τα οποία δε βασίζονται στο πυθαγόρειο κόμμα (23,46 εκ.), ούτε στο συντονικό (21,306 εκ.), αλλά στο κόμμα Χόλτριαν (22,6415 εκ.)<sup>24</sup>.

Κατά τις ίδιες θεωρήσεις χτίζεται λίγο αργότερα και η Τούρκικη μουσική. Τα τονικά συστήματα της βασίζονται στους υπολογισμούς και στη περαιτέρω ανάπτυξη του πυθαγορείου συστήματος, από τον Σαφί αντ Ντιν αλ Ουρμαουί.

21 Ο Αλ Φαράμπι ή αλλιώς Μουχάμαντ ιμπν Ταρχάν ιμπν Ουζλάγκ αλ-Φαράμπι ήταν ο πρώτος καταγεγραμμένος φιλόσοφος του αραβικού κόσμου. Ασχολήθηκε με τη φιλοσοφία, τη κοσμολογία, τη μεταφυσική και τη θρησκεία και έγραψε πολλά έργα επιστημονικού περιεχομένου. Πέθανε στη Δαμασκό το 950 μ.Χ

Βλ. Corbin Henry, Nasr Hossein, Yahya Utman, *History of Islamic philosophy*, translated by Liadain Sherrard, (London: Kegan Paul, 2001), pp. 158-164

22 Τούμα, Χαμπίμπ Χασάν, *Η μουσική των Αράβων*, μτφ Τζωτζίνης Βασίλης, (Αθήνα: Εν χορδαίς, 2007), σ. 19-22

23 Το κόμμα είναι μικροδιάστημα που χρησιμοποιείται στο συγκερασμό μη διατονικών κλιμάκων, όπως στη Βυζαντινή μουσική, την Αραβική μουσική αλλά και το Γρηγοριανό μέλος. Συχνά τέτοιου είδους διαστήματα δε γίνονται αντιληπτά από το ανθρώπινο αυτί.

Barbour, James Murray, *Tuning and Temperament: A historical survey*, (Mineola: Dover Publications, Inc., 2004), pp. 177

24 Τούμα, Χαμπίμπ Χασάν, *Η μουσική των Αράβων*, μτφ Τζωτζίνης Βασίλης, (Αθήνα: Εν χορδαίς, 2007), σ. 23

## Η ΜΟΥΣΙΚΗ ΣΤΗ ΔΥΣΗ

Στη Δύση τα πράγματα διαφέρουν. Κάθε αιώνας και εποχή, βρίσκει το κούρδισμα και τη κλίμακα σε διαφορετικά διαστήματα. Για παράδειγμα κατά τον Μεσσαίωνα, σημαντικότερο διάστημα θεωρείται η 5η καθαρή. Σε αυτήν αλλά και στις φυσικές καθαρές βασίζεται όλο το κούρδισμα της εποχής. Αντίθετα στην Αναγέννηση, αγαπημένο διάστημα είναι η 3η. Τα κούρδισμα περιλαμβάνουν τις φυσικές τρίτες ή κοντά στις φυσικές (μεσοτονικά). Να υπενθυμίσουμε σε αυτό το σημείο. Πως ακόμη δεν έχουμε μείζονες και ελλάσονες κλίμακες, αλλά μουσικούς τρόπους αμετάφερτους ή με λίγες υφέσεις στον οπλισμό ή με κάποια αλλοίωση στο προσαγωγέα. Συνεπώς τα "μαύρα" πλήκτρα κουρδίζονται, ανάλογα με την χρησιμότητα που θέλει ο συνθέτης ή ο εκτελεστής.

Και στις δύο περιόδους, έχουμε σημαντικούς θεωρητικούς, που ανέπτυξαν τη δική τους εκδοχή για τη σχέση της μουσικής και των μαθηματικών.

Στον Μεσσαίωνα, εμφανίζεται ένας μαθηματικός, όπου παρουσιάζει μια πρωτότυπη για την εποχή μαθηματική ακολουθία, βασισμένη στη πυθαγόρεια προσέγγιση των αρμονικών συνηχήσεων, αλλά και σε ένα πείραμα με κουνέλια. Φυσικά, δεν είναι άλλος από τον Λεονάρντο της Πίζας ή πιο γνωστά Λεονάρντο Φιμπονάτσι ( *Leonardo of Pisa* )<sup>25</sup>. Μιλάμε λοιπόν για την πιο γνωστή μαθηματική ακολουθία μέχρι σήμερα, την ακολουθία Φιμπονάτσι, που συνδέθηκε και με τον λόγο 1,61, το λόγο της Χρυσής τομής.

Κάθε αριθμός της ακολουθίας είναι ίσος με το άθροισμα των δύο προηγούμενων ( 1,1,2,3,5,8,13,21,34, 55 κτλ ). Πάνω εκεί, στους δύο διαδοχικούς λόγους της ακολουθίας εξάγεται και η Χρυσή Τομή (  $\varphi = 1.618033989$  ). Η ανακάλυψη της Χρυσής αναλογίας, αποκάλυψε πως πολλά από τα πιο γνωστά έργα σε όλες τις τέχνες τόσο πριν όσο και αργότερα, περικλείουν και βασίζονται σε αυτό τον αριθμό. Για παράδειγμα ο Μότσαρτ πολλά από τα έργα του τα διαίρεσαι σε δύο μέρη, όπου η διάρκεια του εκάστοτε μέρους υπολογίζεται όσο και ο χρυσός αριθμός. Ο ζωγράφος Λεονάρντο Ντα Βίντσι, σχεδίασε τη Μόνα Λίσα, έτσι ώστε το πρόσωπό της να εφαρμόζει τέλεια σε ένα χρυσό ορθογώνιο<sup>26</sup>. Αργότερα κι άλλοι μουσικοί βασίστηκαν στον αριθμό, όπως ο Claude Debussy<sup>27</sup> και ο Bella Bartok<sup>28</sup>.

Ωστόσο, πρέπει να πούμε, πως κι εδώ όπως σε όλες τις τέχνες και επιστήμες, έφτασε ο σκοταδισμός. Ο Μεσσαίωνα ήταν και είναι από τις πιο μαύρες σελίδες της ιστορίας, όχι μόνο για τα τραγικά γεγονότα, αλλά και τον πλούτο γνώσης που χάθηκε. Βέβαια πάντοτε υπήρχαν στιγμές ή περίοδοι που η "ιστορία" δεν έπρεπε να επιτρέψει τη φώτιση των λαών. Για παράδειγμα το 400 μ.Χ ο Άγιος Αυγουστίνος<sup>29</sup> επισήμανε : "Ο καλός Χριστιανός πρέπει να προφυλάγεται από τους μαθηματικούς και όλους εκείνους που κάνουν κενές προφητείες. Ήδη υπάρχει ο κίνδυνος οι μαθηματικοί να έχουν κάνει συμβόλαιο με το διάβολο για να συσκοτίσουν το πνεύμα και να περιορίσουν τους ανθρώπους στα δεσμά της κολάσεως"<sup>30</sup>. Στην άποψη αυτή φαίνεται, όχι μόνο το πως αντιμετωπιζόταν η νέα γνώση κατά καιρούς, αλλά και το πως η θρησκεία τύγγανε να εμποδίζει το επιστημονικό και καλλιτεχνικό πολλές φορές έργο, της εκάστοτε εποχής.

Παρ' όλα αυτά, ακόμα και στα σκοτεινά χρόνια, υπήρξαν πνευματικοί άνθρωποι, που αγωνίστηκαν

25 Grimm, R.E, « The autobiography of Leonardo Pisano », *Fibonacci Quarterly* ( 1973 ), Vol.11, pp. 99-104

26 Το χρυσό παραλληλόγραμμο ορθογώνιο, του οποίου ο λόγος των πλευρών του ισούται με  $1/\varphi$ . Δηλαδή

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \varphi.$$

Βλ. Tattersall, James J., *Elementary Number theory in nine chapters*, 2<sup>nd</sup> edition, ( Cambridge: Cambridge University Press, 2005 ), pp. 28-30

27 Trezise, Simon, *Debussy: La mer*, (Cambridge: Cambridge University Press, 1994 ), pp. 51-53

28 Lendvai, Erno & Bush Alan, *Bela Bartok: An analysis of his music*, ( London: Kahn & Averill Publishers, 2005)

29 Αμπατζοπούλου Φραγκίσκη, *Εισαγωγή: Ο Άγιος Αυγουστίνος και οι εξομολογήσεις*, μτφ. Αμπατζοπούλου Φραγκίσκη, ( τόμος Α', Αθήνα: Πατάκης, 1990 ), σ. 23-42

30 Kline, M., *Mathematics: a Cultural Approach*, ( Reading, MA : Addison-Wesley, 1962 ), pp. 1

για τη γνώση, τη φώτιση και το πνέυμα .

Γύρω στο 400 μ.Χ με 500 μ.Χ , δηλαδή περίπου την εποχή που καταλύεται η Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία και εγκαθιρύεται η περίοδος των βαρβάρων ( Γότθοι, Οστρογότθοι κ.α ), εμφανίζονται τρεις φιλόσοφοι , ο Βοήθιος, ο Κασσιόδωρος και ο Ισίδωρος.

Ο Βοήθιος αποκαλείται « ο τελευταίος των αρχαίων Ρωμαίων ». Γεννήθηκε στη Ρώμη και υπήρξε σημαντικός σύμβουλος του αυτοκράτορα Θεοδορίου , αλλά στο τέλος λόγω συκοφαντιών και αντιζηλίας από τους αυλικούς, βασανίστηκε και θανατώθηκε στα ανάκτορα. Έγραψε το έργο «Μαθήματα αριθμητικής» όπου διακρίνει τα γνωστικά αντικείμενα σε « σύνολα » και « μεγέθη ». Η *αριθμητική* εξετάζεται σύνολα αυτούσια. Η *μουσική* εξετάζει τα σύνολα σε σχέση με άλλες οντότητες- επιστήμες , ενώ η *γεωμετρία* και η *αστρονομία* εξετάζουν τα μεγέθη, η μία σε ηρεμία και η άλλη σε κίνηση. Ο Βοήθιος είχε σκοπό να συγγράψει ένα έργο για κάθε μία από αυτές τις επιστήμες, αλλά δυστυχώς έγραψε μόνο για τις πρώτες δύο.

Ο Κασσιόδωρος ( Μάγνον Αυρήλιον Κασσιόδωρος ), γεννήθηκε περίπου το 475 μ.Χ και πέθανε το 570 μ.Χ . Είχε καταγωγή από τη Νότια Ιταλία . Μετά τα είκοσι έτη του, απεσύρθη σε μοναστήρι για να μελετήσει, όπου καρπός της μελέτης ήταν μία εγκυκλοπαίδεια αποτελούμενη από επτά τόμους με τίτλο *De artibus ac disciplinis liberalium litterarum* ( *Περί τεχνών και επιστημών ελευθέρας παιδείας* ), η οποία πραγματεύεται όλο το trivium και quatrivium , όπου λόγω έλλειψης νέων επιστημονικών πεδίων αλλά και εργαλείων, περιορίζεται στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις.

Ανάμεσα σε αυτά τα σπουδαία πρόσωπα , που είχαν την ατυχία να παρουσιάσουν τις όποιες ιδέες τους σε σκοτεινά χρόνια , γεννιέται στη Σεβίλλη ή την Καρχηδόνα ( δε μπορούμε να είμαστε σίγουροι) περίπου το 560 μ.Χ ο Ισίδωρος και επειδή διετέλεσε για κάποια χρόνια επίσκοπος της πόλης, έμεινε ο Ισίδωρος της Σεβίλλης. . Συνέθεσε ένα σύγγραμμα εγκυκλοπαιδικού τύπου, με τον τίτλο *Origines* ( *Αρχές* ) στο οποίο εξετάζονται όλοι οι επιστημονικοί κλάδοι της εποχής και μέσα σε αυτούς τα μαθηματικά και η μουσική. Αν και δεν υπήρξε από πλευράς του κάποια προσωπική ανακάλυψη σε σχέση με το μουσικομαθηματικό κλάδο, είναι άξιο θαυμασμού το φιλομαθηματικό του πνεύμα . Απεβίωσε το 660 μ.Χ στη Σεβίλλη.

Αντίθετα, στην Αναγέννηση, τα πράγματα φωτίζονται. Η εποχή, είναι ακριβώς όπως τη περιγράφει η λέξη. Το trivium και quatrivium ανθίζει. Έχουμε εξαιρετικά έργα που μας συγκινούν μέχρι σήμερα. Όμως έχουμε και καλπάζουσα ανάπτυξη της επιστήμης και των θεωριών. Ανάμεσα σε αυτές είναι και η θεωρία του νεαρού μουσικολόγου Giossefo Zarlino ( 1517- 1590) .

Ο Ζαρλίνo θεωρείται από τους κατεξοχήν σημαντικότερους μουσικούς θεωρητικούς της ιστορίας . Ο ίδιος δημιούργησε παραλλαγή της κλίμακας του Διδύμου , που με τη σειρά της ονομάστηκε κλίμακα Zarlino , και εναλλάσσει την έκτη και έβδομη συγχορδία της κλίμακας ώστε να υπάρχει η δυνατότητα συνοδείας από τρίφωνες συγχορδίες. Οι κανόνες του Διδύμου συνεχίζουν να ισχύουν ενώ η κλίμακα αυτή ονομάστηκε και Just intonation <sup>31</sup>

Ακολούθησε ο Ζαν Μπατίστ Ζοζέφ Φουριέ ( *Jean Batist Joseph Fourier* )<sup>32</sup>. Γεννήθηκε το 1768 στο Auxerre της Γαλλίας και πέθανε το 1830. Ασχολήθηκε με τη φυσική και τα μαθηματικά, με πρωτοπόρες για την εποχή παρατηρήσεις , που μελετάμε μέχρι και σήμερα, όπως οι μαθηματικές σειρές που ανέπτυξε, ο περίφημος *Νόμος ψύξης του Νέυτωνα* κ.α Το ενδιαφέρον του, για τον δικό μας κλάδο, έπεσε στη θεωρία της παλόμενης χορδής του Πυθαγόρα. Σαφώς και άλλοι μαθηματικοί είχαν προσπαθήσει να τη λύσουν και να την εξηγήσουν , όπως ο Daniel Bernoulli , όμως ο Φουριέρ, τα κατάφερε ολοκληρωτικά. Το 1822 εκδίδει ένα επιστημονικό έργο, με τίτλο *Theorie analytique de la chaleur* , όπου παρουσιάζει πλήρως τη γενική λύση του προβλήματος της παλόμενης χορδής. Βάσει κάποιων μαθηματικών αστάθμητων παραγόντων, που ο Πυθαγόρας δεν μπορούσε να υπολογίσει, λόγω έλλειψης τεχνικών μέσων, ο Φουριέρ απέδειξε ότι σε περίπτωση

31 Βλ. Duffin, Ross W. , « Just Intonation in Renaissance Theory and Practice », από τον ιστότοπο *A journal for the society for Music theory* ( <http://www.mtosmt.org/issues/mto.06.12.3/mto.06.12.3.duffin.html> ), ημερομηνία προσπέλασης: 26-12-2018

32 « Joseph Fourier », Francois Arago, *Biographies of distinguished scientific men [PDF]*, ( Boston: H.O. HOUGHTON AND COMPANY, 2005), ( [http://www.gutenberg.org/files/16775/16775-h/16775-h.htm#JOSEPH\\_FOURIER](http://www.gutenberg.org/files/16775/16775-h/16775-h.htm#JOSEPH_FOURIER) )

που συνηχούν δύο νότες και η μία έχει διπλάσια συχνότητα από την άλλη, τότε έχουμε την αίσθηση πως ακούγεται η ίδια νότα. Μπορεί να το έχετε παρατηρήσει στο διάστημα της όκταβας. Με λίγα λόγια, είναι ο πρώτος που αποδεικνύει ότι κάθε περιοδική συνάρτηση  $f$  είναι εφικτό να αναλυθεί σε ένα άπειρο άθροισμα.

Στα τέλη του 19ου αιώνα κάνει την εμφάνιση του, ένα νέο μουσικό είδος, η τζαζ<sup>33</sup> κυρίως στην Αμερική. Κι ενώ οι περισσότεροι πιστεύουν πως βασίζεται κυρίως στον αυτοσχεδιασμό, η ίδια κρύβει ανεξάντλητη μαθηματική ερμηνεία.

Ο πρώτος που κάθεται στη κυριολεξία με μολύβι και χαρτί, προκειμένου να ανακαλύψει τι κρύβεται, είναι ο σαξοφωνίστας John Coltrane ( 1926-1967) .

Γεννήθηκε στη Βόρεια Καρολίνα της Αμερικής και ασχολήθηκε από τη νεαρή του ηλικία με τη μουσική και το 1947 παίζει ήδη επαγγελματικά. Το 1950 στρέφεται ολοκληρωτικά στην απελευθερωμένη τζαζ . Η δισκογραφία του είναι τεράστια , αλλά αυτό που τον εξύψωσε ήταν το έργο *Giant Steps*<sup>34</sup> Οι αλλαγές των συγχορδιών είναι μοναδικές και χρειάζονται ιδιαίτερη δεξιοτεχνία ,ενώ ο ίδιος ο τίτλος μας δίνει μια ιδέα για το τι έπεται. Αξίζει να σημειωθεί πως αργότερα αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε τόσο στον τζαζ αυτοσχεδιασμό , όσο και για μελέτη στους εκτελεστές και οι συγχορδίες αυτές ονομάστηκαν *Coltrane's changes*<sup>35</sup> Τι το διαφορετικό όμως κρύβεται σε αυτό το έργο;

Πρώτο και κύριο χαρακτηριστικό του, ο *Κύκλος των 5ων*<sup>36</sup> . Το χαρακτηριστικό με τις πέμπτες είναι πως ταυτίζονται πολύ εύκολα με το ανθρώπινο αφτί διότι περιλαμβάνονται σε οτιδήποτε ακούμε



Εικόνα 1: Τα πρώτα μέτρα από το έργο "Giant Steps"

33 Hennessey, Thomas, *From jazz to swing: African-American jazz musicians and their music, 1890-1935*, ( Detroit: Wayne State University Press, 1994), pp. 470-474

34 Cook, Richard, Morton, Brian, «John Coltrane». *The Penguin Guide to Jazz Recordings*, ( 8<sup>th</sup> ed. , New York: Penguin, 2006), pp. 269

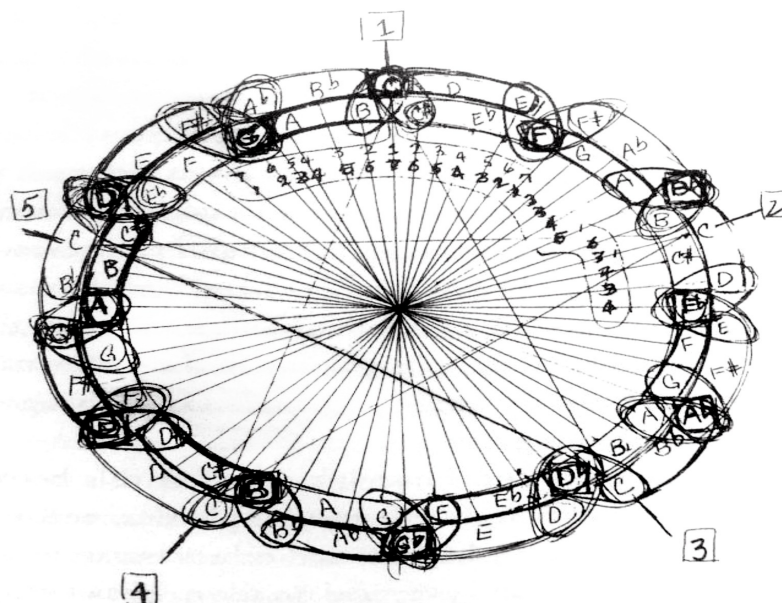
35 Martin, Henry, « Expanding Jazz Tonality: The Compositions of John Coltrane », *Theory and Practice* ( 2012-2013), pp. 185-219

36 Στον κύκλο των 5ων βρίσκουμε και τις 12 νότες της δυτικής κλίμακας . Στο κύκλο των 5ων οργανώνονται με βάση τον αριθμό 5. Δηλαδή η μία νότα από την άλλη πρέπει να απέχει πέντε νότες. Αν για παράδειγμα ξεκινήσουμε από το Cmajor η επόμενη νότα είναι η Gmajor .



γύρω μας. Αυτές οι 5ες λοιπόν είναι η ραχοκοκαλιά της τζαζ μουσικής ,γι' αυτό και το συγκεκριμένο έργο είναι γεμάτο από αυτές, όπως μπορούμε να δούμε και παρακάτω.

Το πρόβλημα όμως δεν έγκειται στη συνεχή χρήση των 5ων, αλλά στο ότι οι αλλαγές τους εκτελούνται σε τρία διαφορετικά κλειδιά. Αποτέλεσμα είναι κάθε 5η να αποτελεί ακουστικά ένα πιθανό τονικό κέντρο. Τώρα για να κατανοήσουμε τη συνέχεια, θα πρέπει να φανταστούμε την κάθε τονικότητα σαν μία αυτόνομη γλώσσα. Όπως είναι γνωστό, πολλές γλώσσες μεταξύ τους μοιάζουν , π.χ Ισπανικά με Ιταλικά, υπάρχουν όμως κι εκείνες που δεν έχουν κανένα κοινό, όπως τα Ελληνικά με τα Σέρβικα. Έτσι λοιπόν έχουμε τονικότητες που είναι σχεδόν κοινές, π.χ η Ντο μείζονα με την Σολ μείζονα , και τονικότητες που δεν έχουν κανένα κοινό σημείο επαφής, όπως η Ντο μείζονα με την Σι ύφεση μείζονα. Από τον 20ο αιώνα και μετά παρατηρείται πως πολλά τραγούδια κυρίως της τζαζ και ποπ κουλτούρας επιλέγουν τονικότητες από τον κύκλο και πολλές φορές γίνονται μετατροπές μέσα σε αυτά σε απομακρυσμένα τονικά κέντρα. Ως αποτέλεσμα έχει ,να δημιουργούνται μοτίβα μέσα στο κύκλο των 5ων , μοτίβα που ανακάλυψε ο ίδιος ο Coltrane τη δεκαετία 50' - 60' ,στη προσπάθεια του να ωθήσει τη τζαζ μουσική στα άκρα της.



Εικόνα 2: Ο κύκλος των 5ων του Coltrane ,σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα που έκανε ο ίδιος

Αυτή είναι η μελέτη του ίδιου του Coltrane . Τώρα αν κοιτάξουμε τα πρώτα μέτρα του Giant Steps, και εφαρμόσουμε τις τονικότητες με τη σειρά που τις παραθέτει, στον παραπάνω κύκλο, θα δούμε πως αυτομάτως σταδιακά, σχηματίζεται ένα τέλειο αστέρι. Παράλληλα θα δούμε οι πρώτες τρεις τονικότητες, απέχουν μεταξύ τους ένα διάστημα τρίτης<sup>37</sup>, ενώ η Σι μείζονα και η Σολ μείζονα που αρχίζει το κομμάτι , ανήκουν στην κλίμακα της Μι ύφεση μείζονα. Αν συνηθετοποιήσουμε με γλώσσες, τι υπάρχει στο έργο, το αποτέλεσμα είναι σίγουρα εντυπωσιακό. Ουσιαστικά ο συνθέτης γράφει σε άσχετες μεταξύ τους γλώσσες, και απαιτεί τόσο από τον εαυτό του όσο κι από τον πιανίστα να παίζει ανα δύο χτύπους του τραγουδιού δύο λέξεις από τη κάθε γλώσσα, δηλαδή δύο συγχορδίες από κάθε τονικό κέντρο που περνάει, σε μόλις 300 bpm . Δηλαδή φτιάχνει μια ολόκληρη μουσική φράση, από τρεις ή και παραπάνω " ξένες γλώσσες ".Και όλο αυτό μέσα από ένα και μόνο συγχορδιακό μοντέλο αυτό της V – I .

Δημιουργεί λοιπόν ένα άρτια μουσικομαθηματικό μοντέλο, μέσα από τέλεια μουσικά τρίγωνα, όπου ναι μεν θεωρητικά απέχουν οι άκρες κατά πολύ ,η μία από την άλλη, αλλά ακουστικά έχει την

Βλ. Whittall, A., « Circle of Fifths », Latham, E. , *The Oxford Companion to Music*, ( Oxford: Oxford University Press, 2002), pp. 259-260

37 Demsey, David, « Chromatic third relations in the music of John Coltrane », *Annual Review of Jazz Studies* (1991), Vol.5, pp. 145-180

αίσθηση ο ακροατής, πως βρίσκεται πάντοτε σε ένα τονικό κέντρο. Όμως η τζαζ, είναι μια μουσική που για να την κατανοήσει κανείς δε χρειάζεται τόσο το πεντάγραμμο και το μολύβι, όσο η ακρόαση.

Το ίδιο θα μπορούσαμε να πούμε πως συμβαίνει κάποιες δεκαετίες αργότερα, στην Ευρώπη με έναν Έλληνα αρχιτέκτονα και μουσικό, αποκλεισμένο από τη χώρα του, με σχεδόν επαναστατικές ιδέες για τον τρόπο σύνθεσης και ακρόασης της μουσικής, που μέχρι και σήμερα θα αποτελεί αντικείμενο μελέτης και μίμησης. Φυσικά, δεν είναι άλλος, από τον Ιάννη Ξενάκη ( 1922-2001).

Συνδύασε τόσο άρτια την αρχιτεκτονική και τη φυσική με τα μαθηματικά, που μπορούμε να πούμε πως δημιούργησε έναν καινούργιο μουσικό κλάδο. Τα μαθηματικά και φυσικά του μοντέλα βρίθουν στα έργα του, πολλά από τα οποία, τα άκουσα για πρώτη φορά. Παράλληλα, έθεσε τη μουσική στην ύψιστη βαθμίδα της φιλοσοφικής σκέψης, με ιδέες, όπως η ενότητα φιλοσοφίας, τέχνης και επιστήμης. Μια ιδέα, που αν κοιτάξει κανείς βαθύτερα, μπορεί και να πέτυχε σε ένα βαθμό.

Χαρακτηρίστηκε « νεοπυθαγόρειος» χάρη στη χρήση των μαθηματικών μοντέλων. Όμως ο Ξενάκης, δε χρησιμοποίησε τη φυσική και τα μαθηματικά για να εξηγήσει τη λειτουργία της μουσικής, αλλά για να δημιουργήσει κάτι καινούργιο. Εκμεταλλεύτηκε τους δύο αυτούς κλάδους καθώς και τα σύγχρονα επιστημονικά εργαλεία ( UPIC system, ηλεκτρονικό υπολογιστή), και δημιούργησε μια καινούργια μουσική<sup>38</sup>.

Δυσκολίες υπήρξαν. Το πρωτοποριακό στοιχείο και το ολότελα καινούργιο δεν έγινε από παντού αποδεκτό. Ακόμα και συνθέτες με πρωτοποριακό μουσικό υλικό όπως ο Πιερ Μπουλέζ<sup>39</sup> τον απομάκρυναν. Όμως οι βασικότεροι εχθροί του δεν ήταν αυτοί, αλλά ο εαυτός του. Δίότι δεν είναι καθόλου εύκολο, να ξεπερνάς κάθε φορά τις προσδοκίες και τους στόχους που θέτεις και κάθε φορά να είναι ξεχωριστό και πρωτότυπο αυτό άλλωστε το διαπιστώνει κι ο ίδιος: *“κανείς δεν μπορεί να δημιουργήσει έναν νέο κόσμο . Είναι αδύνατο να δημιουργήσει κανείς κάτι το πραγματικά διαφορετικό, δεν υπάρχουν τέτοια παραδείγματα στην ιστορία της τέχνης. Είναι λυπηρό: είμαστε δεσμώτες του ίδιου μας του εαυτού”*<sup>40</sup>

Για το διττό του χαρακτήρα του, αλλά και για τον επαναστατικό φορμαλισμό που εφάρμοσε στις συνθέσεις του, στο Ξενάκη συναντάμε θερμούς υποστηρικτές αλλά και επικριτές μέχρι και σήμερα. Ο ίδιος δεν ενδιαφέρθηκε ποτέ για την κριτική που του ασκήθηκε, ίσως γιατί την κριτική την περίμενε από τα ίδια του τα έργα κατά συνέπεια από τον εαυτό του. Ο Ξενάκης, παρέμεινε το ίδιο παθιασμένος και ιδεαλιστής με το έργο του μέχρι και το τέλος της ζωής του ( 4-2-2001) και μέχρι σήμερα απασχολεί την μουσική επιστημονική κοινότητα, σαν κάτι απροσπέλαστο και μοναδικό.

---

38 Βλ. Κεφάλαιο III *Η στοχαστική μουσική του Ιάννη Ξενάκη*

39 G. William HOPKINS, et Paul GRIFFITHS, “Boulez, Pierre”, in *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*, 2e éd., Stanley Sadie et John Tyrell (éd.), Londres, Macmillan Publishers, vol. IV, 2001, p. 98-108.

40 Varga, Balint, *Conversations with Iannis Xenakis*, ( London: Faber and Faber, 1996), μτφ Συμεωνίδου Α., ( Αθήνα: Ποταμός, 2004), pp. 71

## Κεφάλαιο Δεύτερο :

### « Η Πυθαγόρεια Σχολή »

**" Πάντα κατ' αριθμόν γίνονται "**  
**Πυθαγόρας**

"Όλα γίνονται με βάση τους αριθμούς", αυτό μας λέει το παραπάνω ρητό και αποτελεί ίσως μία από τις σημαντικότερες θεωρίες τόσο του 6ου αιώνα π.Χ όσο και του Πυθαγόρα αλλά και της Πυθαγόρειας σχολής που ο ίδιος θα ιδρύσει όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Ξεκινώντας από τους πρώτους φιλοσόφους που εμφανίζονται τη πρώτη περίοδο της φιλοσοφίας, τους επονομαζόμενους προσωκρατικούς<sup>41</sup>, παρατηρείται πως είναι εξαιρετικά δύσκολο να έχουμε αντικειμενική αποτίμηση και ερμηνεία, μιας και δεν έχουμε πλήρη διασωζόμενα φιλοσοφικά έργα από αυτή τη πρώτη περίοδο. Η έρευνα γίνεται ακόμη πιο δύσκολη στη περίπτωση του Πυθαγόρα. Ο Πυθαγόρας ανήκει σε έναν από τους πέντε προσωκρατικούς φιλοσόφους, με μεγάλο φιλοσοφικό και επιστημονικό έργο που ωστόσο δε κατέγραψε ποτέ. Ο ίδιος εκπροσωπεί μια πρωτότυπη φιλοσοφική σκέψη για τα δεδομένα εκείνης της εποχής, που οι απαρχές της βρίσκονται στα μέσα του 6ου αιώνα π.Χ, στον Κρότωνα της κάτω Ιταλίας. Οι ιδέες του βασίζονται στην προσπάθεια κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου, καθώς και στην αναζήτηση του νοήματος της ζωής και του θανάτου. Για πρώτη φορά στην ιστορία της αρχαίας ελληνικής σκέψης ένας φιλόσοφος συνδυάζει τόσο τις ηθικοθηρησκευτικές αντιλήψεις όσο και την υλιστική υπόσταση του φυσικού κόσμου σε μία ενιαία και σύνθεση. Για την προσωπικότητα του έχουμε πληθώρα αρχαίων μαρτυριών. Μάλιστα από τον 3ο αιώνα μόνο, έχουμε τρεις εκτεταμένες βιογραφίες, πλήρως σωζόμενες, του Διογένη Λαέρτιου Διογένης Λαέρτιος : *Βίοι φιλοσόφων* του Πορφύριου : *Πυθαγόρου βίος* καθώς και του Ιάμβλιχου : *Περί του πυθαγορείου βίου*. Από την άλλη πλευρά όμως, τα χρόνια που έχουν μεσολαβήσει μέχρι τη δημιουργία αυτών των βιογραφιών, αλλά και οι υπέρογκες πληροφορίες που μας παρέχουν, είναι βασικοί λόγοι για να αμφισβητηθεί από πολλούς η αξιοπιστία τους. Λόγω των πολλών αναξιόπιστων πληροφοριών περί του βίου του πολλοί όπως οι σκεπτικιστές έφτασαν να αμφισβητούν ακόμη και την ύπαρξή του. Ευτυχώς για εμάς σήμερα, υπάρχουν πολλές μεταγενέστερες αναφορές τόσο φιλοσόφων όσο και ιστορικών, στη ζωή του Πυθαγόρα, που μας επιβεβαιώνουν την εγκυρότητα ορισμένων βιογραφικών και μη στοιχείων<sup>42</sup>.

41 « Προσωκρατικούς », ονομάζουμε όλους εκείνους τους φιλοσόφους που έζησαν και ανέπτυξαν φιλοσοφικές θεωρήσεις, πριν από τον Σωκράτη ( 470 – 399 π.Χ). Βλ. Kirk, G.S. , Raven, J. E. , Schofield M. , *The Presocratic Philosophers: A Critical History with a Selection of Texts* , Cambridge: Cambridge University Press, 1983, pp. 7-8

42 “ Ο Πυθαγόρας, ο γιος του Μνησάρχου, περισσότερο απ’ όλους επιδόθηκε στην έρευνα· και αφού επέλεξε από αυτές τις γνώμες, έφτιαξε τη δική του σοφία: πολυμάθεια και δόλια τέχνη ” , Ηράκλειτος, απόσπ. 129

“ Λένε ότι όταν κάποτε είδε να βασανίζουν ένα σκυλάκι, το συμπόνεσε και είπε: «Σταμάτα, μην το χτυπάς, γιατί είναι η ψυχή κάποιου φίλου· την αναγνώρισα όταν άκουσα τη φωνή του” , Ξενοφάνης, απόσπ. 7

## 2.1 Ιστορική αναδρομή

Η ίδρυση της Πυθαγόρειας σχολής πιθανολογείται περίπου το 530 π.Χ.<sup>43</sup> λίγο αργότερα αφότου έφτασε ο Πυθαγόρας στο Κρότωνα . Είναι η πρώτη επίσημη σχολή που ιδρύεται αν και οι περιγραφές αλλά και τα διασωθέντα στοιχεία μας φέρνουν περισσότερο σε μια αυστηρή θρησκευτική αδελφότητα. Η Πυθαγόρεια ακαδημία δημιουργήθηκε αρχικά για τη μελέτη της φιλοσοφίας και των μαθηματικών. Με τη πάροδο των χρόνων η μελέτη αυτή επεκτάθηκε και σε τομείς όπως η αστρονομία, η φυσική και η μουσική. Η λειτουργία της σχολής βασιζόταν στο μυστικισμό, στη συλλογική σκέψη και εργασία. Θα μπορούσαμε να παρομοιάσουμε τη νοοτροπία και τον τρόπο σκέψης του με αυτή των πρώτων Χριστιανών.

Η σχολή δεχόταν μαθητές έπειτα από αυστηρά κριτήρια και δε περιοριζόταν στο φύλλο του σπουδαστή. Οι δοκιμασίες που περνούσαν στη διαδικασία εισαγωγής στη σχολή ονομασθηκαν Πυθαγόρεια μυστήρια<sup>44</sup>. Αρχικά ήταν απλές και στη συνέχεια δυσκόλευαν. Κατά τη διαδικασία των δοκιμασιών, ο Πυθαγόρας εξέταζε τον κοσμικό τους βίο, δηλαδή της ενασχολήσεις, τις προσωπικές τους σχέσεις με τους γονείς και τους φίλους, αλλά και τη κοινωνική τους συμπεριφορά. Επιπλέον ο ίδιος βασιζόταν πολύ στη στάση του σώματος των υποψηφίων καθώς και στην ομιλία. Στο επόμενο στάδιο δοκιμάζονταν στη σιωπή και τη μοναξιά κι αν ήταν ικανοί να παραγκωνίσουν τον εγωισμό τους και τις κοσμικές τους τιμές. Η απομόνωση διαρκούσε περίπου τρία έτη με στόχο και την εγκράτεια. Ύστερα επέβαλε στους μαθητές του πενταετή σιωπή και στο διάστημα αυτό οι υποψήφιοι απλώς άκουγαν τις διδασκαλίες . Ύστερα από τη πενταετή αυτή δοκιμασία οι υποψήφιοι ονομάζονταν «εσωτερικοί » και εισέρχονταν επισήμως στη σχολή ως μαθητές του, και παρακολουθούσαν αρχικά τον Πυθαγόρα , γι' αυτό και σε αυτό το στάδιο ονομάζονταν « ακουσματικοί ».

Από τη στιγμή που οι υποψήφιοι επιτύγχαναν στις δοκιμασίες , γίνονταν δεκτοί μετά τιμών από τους συμμαθητές τους, έπαιρναν τον άριστο βαθμό και μετοίκιζαν στους κοιτώνες της σχολής. Κατά την επιτυχή εισαγωγή τους στη σχολή , έδιναν όλα τους τα υπάρχοντα στους ταμίες της σχολής , μιας και ο ίδιος ο Πυθαγόρας πίστευε πως τα κοινά πρέπει να μοιράζονται. Από την άλλη αν κάποιος υποψήφιος αποτύγχανε στην εισαγωγή του, του επιστρέφονταν από τους ταμίες όλα του τα υπάρχοντα εις διπλούν και οι μαθητές έφτιαχαν ένα μνήμα όπως αυτά των νεκρών όπου τοποθετούνταν εντός της σχολής.

Η σπουδαστική θητεία των μαθητών μπορούσε να διαρκέσει από δύο έως πέντε έτη και χωριζόταν σε βαθμίδες οι οποίες με τη σειρά τους αποτελούνταν από δοκιμασίες ( διαπεΐρα ).

Η πρώτη βαθμίδα περιελάμβανε τους υποψηφίους προς εισαγωγή , οι οποίοι περνούσαν από συγκεκριμένες δοκιμασίες προκειμένου να γίνουν δεκτοί από τα μέλη. Στην επόμενη βαθμίδα βρίσκονταν οι «ακουσματικοί», οι οποίοι δεν είχαν το δικαίωμα οπτικής επαφής με τον δάσκαλο, αλλά μόνο της παθητική ακρόασης. Στο τελευταίο επίπεδο , βρίσκονταν οι εκλεκτοί. Αυτοί μπορούσαν να συζητούν με τον μέγα δάσκαλο και με τους μαθητευόμενους ή μαθηματικούς<sup>45</sup> . Σε αυτή την βαθμίδα γινόταν όλη η έρευνα σε όλους τους κλάδους της σχολής. Η συμπεριφορά των μαθητών καθοριζόταν από ένα σύνολο κανόνων απαγόρευσης και πρότρησης οι οποίοι αποσιθίζονταν από τα μέλη. Αυτοί οι κανόνες ονομάζονταν « Ακούσματα » ή « Σύμβολα »

Η διατροφή τους ήταν καθαρά χορτοφαγική, συμπεριλαμβανομένων των γαλακτοκομικών , των ξηρών καρπών και των οσπρίων<sup>46</sup>, κι αυτό γιατί πίστευαν πως ένα ζώο ως έμψυχο ον μπορούσε να

43 Βλ. Hermann Arnold, *Σκέψου σαν θεός: Πυθαγόρας και Παρμενίδης*, Αθήνα, Ενάλιος, (2008), μτφ. Τριάδα Πηνελόπη, σ.65

44 Αποτελούσαν κέντρο του Πυθαγορικού συστήματος και δεσμού , συνδυάζοντας στοιχεία από τα Ορφικά και Καβεικά μυστήρια και άκμασαν στον Κρότωνα κατά τον 5ο π.Χ αιώνα. Βλ. Σιέττος Β. Γ. , *Τα Πυθαγόρεια Μυστήρια*, Αθήνα: Πύρινος Κόσμος, 1993

45 W.K.C Guthrie, *A History of Greek Philosophy, Volume I: The Earlier Presocratics and the Pethagoreans* , Cambridge, Cambridge University Press, (1962), Τομ. Ι, σελ. 30-31

46 “ Για το γεύμα τους οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν αποκλειστικά άρτο και μέλι”. Ιάμβλιχος , *Περί του*

φιλοξενήσει τη ψυχή και το πνεύμα ενός προγόνου. Εκτός όμως από τα ζώα, απαγορευόταν να καταναλώνουν και φασόλια. Για τους Πυθαγόρειους τα φασόλια ήταν ιέρα, μιας και θεωρούσαν πως έκρυβαν μέσα τους την ιερή ρίζα όλης της χλωρίδας. Ωστόσο απαγορευόταν ρητά η κατανάλωση κουκιών, μιας και το θεωρούσαν "ακάθαρτο" φυτό<sup>47</sup>.

Φυσικά όπως κάθε σχολή έτσι και εδώ υπήρχε συγκεκριμένος κύκλος σπουδών και βασιζόταν σε τέσσερις βασικές τέχνες τη Φιλοσοφία, τα Μαθηματικά, την Αστρονομία και την Αρμονία<sup>48</sup>. Κατά τους Πυθαγόρειους αυτές ήταν οι βασικές γνώσεις που έπρεπε να έχει το κάθε άτομο για να πορευτεί στη ζωή του. Κάθε επίπεδο περιείχε τη δικιά του διδασκαλία και μαθήματα. Οι Ακουσματικοί διδάσκονταν το μυστικό της δυαδικότητας του ανθρώπινου όντος, ψυχολογία, ασκήσεις για την ηθική ανάπτυξη της προσωπικότητας και αυτοέλεγχο<sup>49</sup>.

Όσοι συμπλήρωναν το 28ο έτος της ηλικίας τους διδάσκονταν τα μυστικά των μαθηματικών καθώς και την μυστηριακή δύναμη του Χρυσού Αριθμού. Από εκεί και έπειτα είχαν δικαίωμα να ενταχθούν ξανά στο κοινωνικό βίο, βοηθώντας τους συμπολίτες τους.

Στο ανώτερο στάδιο άνηκαν οι Σεβαστικοί ή Μαθηματικοί και ήταν λίγοι αυτοί που κατάφερναν να φτάσουν. Κύριο μέλημα τους ήταν τα μαθήματα και η εποπτεία της σχολής, ενώ ταυτόχρονα οι ίδιοι, δίπλα στον Πυθαγόρα, μυσούνταν στα μυστήρια της φύσης, της αστρονομίας και της αστρολογίας. Σε αυτή την βαθμίδα γινόταν όλη η έρευνα σε όλους τους κλάδους της σχολής.

Το τέλος της σχολής ήρθε από έναν αριστοκράτη άνδρα της εποχής των Κύλων, όταν ζήτησε από τον φιλόσοφο να γίνει μέλος της σχολής του και ο Πυθαγόρας γνωρίζοντας τις πράξεις αλλά και τον χαρακτήρα του ανδρός τον έδιωξε, μη δίνοντας σημασία στην πρόταση του. Ο Κύλων με αφορμή αυτό το προσβλητικό γεγονός και με τη βοήθεια του ρήτορα Νίνωνα άρχισε να συκοφαντεί τους Πυθαγόρειους για μια επικείμενη τυρρανεία. Σε πολύ λίγο χρονικό διάστημα οι συκοφαντίες περί των Πυθαγορείων φούντωσαν με αποκορύφωμα την επίθεση των υποστηρικτών του Κύλωνος στους Πυθαγορείους στην οικία του Μίλωνα. Πλήθος φιλοσόφων δολοφονήθηκαν και άλλοι εκδιώχθηκαν. Όσο για το αν βρισκόταν εκεί ο ίδιος ο φιλόσοφος, αυτό δυστυχώς δε μπορούμε να το γνωρίζουμε με σιγουριά. Γνωρίζουμε όμως πως το υπόλοιπο της ζωής του το πέρασε στο κοντινό Μεταπόντιο<sup>50</sup> όπου και πέθανε.

---

*Πυθαγορείου Βίου, παρ.97.*

47 Ο Εμπεδοκλής ο Ακραγαντίνος, τονίζει σθεναρά: "Δειλοί, πάρτε τα χέρια σας από τα κουκιά". ("Δειλοί, πάνδειλοι, κυάμων από χείρας έχεσθαι"). Βλ. Καθαρμοί, Diels, αποσπ. 141

48 Το ονομαζόμενο κατά την Αναγέννηση quadrivium περιελάμβανε τις τέχνες της φιλοσοφίας, των μαθηματικών, της αστρονομίας και της Αρμονίας. Αντίθετα το trivium περιλαμβάνει, τη γραμματική, τη ρητορική και τη λογική. Βλ. Warren E. Preece/ Robert L. Collison, *Encyclopaedia*, από τον ιστότοπο Encyclopaedia Britannica (<https://www.britannica.com/topic/encyclopaedia#ref193966>), ημερομηνία προσπέλασης: 20-4-2018

49 Γι' αυτό το λόγο ο Πυθαγόρας χρησιμοποιούσε τη « δίκαιη κούπα » ή αλλιώς « κούπα του Πυθαγόρα ». Πέρα από μία έξυπνη υδραυλική τεχνολογία για τον περιορισμό κρασιού είχε σκοπό να διδάξει στους μαθητευόμενους την εγκράτεια και το μέτρο. Όσο για τη λειτουργία της, στο εσωτερικό τοίχωμα της κούπας υπάρχει χαραγμένη μια γραμμή η οποία οριοθετεί την ποσότητα του κρασιού. Μέχρι τη γραμμή μπορεί ο οποιοσδήποτε να απολαύσει το κρασί του. Από τη στιγμή που το κρασί θα ξεπεράσει τη γραμμή η κούπα αδειάζει αμέσως, αποβάλλοντας το κρασί από τη βάση του ποτηριού. Στο κέντρο της κούπας υπάρχει μία στήλη που είναι τοποθετημένη πάνω από έναν σωλήνα που οδηγεί στο κάτω μέρος της. Όσο γεμίζει η κούπα, παράλληλα η στάθμη του κρασιού ανεβαίνει και στο εσωτερικό της κεντρικής στήλης. Μόλις, το υγρό υπερβεί τη γραμμή, τότε τα μόριά του παρασύρουν το ένα το άλλο, έχοντας ως αποτέλεσμα το άδειασμα της κούπας.

Βλ. Ηρών Αλεξανδρέως, *Πνευματικά Ι*, 16

50 Το Μεταπόντιο υπήρξε αρχαία Ελληνική αποικία της Κάτω Ιταλίας και ιδρύθηκε από τους Αχαιούς το 773 π.Χ. Η ονόμασία του είναι σύνθετη (μετά + πόντος), και σημαίνει «μετά τη θάλασσα». Για την ίδρυσή του οι απόψεις διίστανται, μιας και έχουμε πληθώρα από αρχαίους ιστορικούς και φιλοσόφους με διαφορετική άποψη. Η πόλη άκμασε περίπου τον 6ο – 5ο π.Χ αιώνα. Στα τέλη του 6ου αιώνα αναφέρεται πως έφτασε εκεί ο Πυθαγόρας.

Βλ. « Μεταπόντιο », *Εγκυκλοπαίδεια Δομή*, Αθήνα: Τεγόπουλος-Μανιατσάς, Τόμος 10, σ. 285



## 2.2 Οι θεωρίες

Για πολλούς ο Πυθαγόρας, εκτός από μεγάλος μαθηματικός και φιλόσοφος, υπήρξε και θρησκευτικός ηγέτης. Αρχικά η σχολή του έμοιαζε περισσότερο με κάποιου είδους θρησκευτικό τάγμα, με στόχο τη λατρεία του ίδιου του ιδρυτή της αλλά και του Απόλλωνα και των Μουσών, όπου θεωρούνταν οι προστάτιδες του πνεύματος. Σε γενικές γραμμές οι θρησκευτικές αντιλήψεις της σχολής συγκλίνουν πολύ με αυτές του Ορφισμού<sup>51</sup>.

Οι δύο μεγαλύτερες πεποιθήσεις του είναι πως όλα είναι αριθμοί και το δόγμα της μετεμψύχωσης<sup>52</sup>. Στη Πυθαγόρεια φιλοσοφία και σχολή φαίνεται πως οι δύο αυτές αντιλήψεις συνυπήρχαν, ωστόσο αποτελούσαν διαφορετικούς κλάδους. Χωρίζονταν σε « Μαθηματικούς » και « Ακουσματικούς ».

Οι μεν πρώτοι μελετούσαν τα πάντα γύρω από τα μαθηματικά, τη πυθαγόρεια γεωμετρία την αστρονομία και τη μουσική, άλλωστε η ζωή για τους Πυθαγορείους είναι κάτι το εξαιρετικά σοβαρό και για να τη ζήσει κανείς όπως πρέπει χρειάζεται συστηματική προπαιδεία<sup>53</sup>.

Οι μεν άλλοι εστίαζαν στο θρησκευτικό και μυστικιστικό χαρακτήρα του πυθαγορισμού.

Είναι αληθές κι από τα αρχαία διασωθείσα κείμενα πως ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την αντίληψη της μετεμψύχωσης στον ελλαδικό χώρο. Φυσικά δεν την επινόησε ο ίδιος αλλά επηρεάστηκε από τους ανατολικούς πολιτισμούς όπου φοίτησε<sup>54</sup>. Στην Ελλάδα είχαμε πάντοτε επιρροές από τους Αιγύπτιους και ο Πυθαγόρας είχε φοιτήσει αρκετά έτη κοντά τους, ωστόσο το δόγμα της μετεμψύχωσης δεν είναι κάτι που άνηκε στις θρησκευτικές τους αντιλήψεις. Οι εκδοχές για την προέλευση αυτού του δόγματος είναι ποικίλλες και φαίνεται λογικό μιας και εκείνη την εποχή η Ελλάδα ερχόταν σε επαφή με διάφορους πολιτισμούς λόγω εμπορίου, κατακτήσεων κ.α.

Το δόγμα της μετεμψύχωσης εκτός από τη συνέχιση της ζωής και μετά το θάνατο, προϋποθέτει και τη μεταθανάτια τιμωρία ή ανταμοιβή. Ωστόσο αυτό δεν ήταν κάτι καινούργιο για τα ελληνικά δεδομένα, αφού οι μαρτυρίες των Ελευσίνιων μυστηρίων μας αποκαλύπτουν πως προετοίμαζαν τους πιστούς για μια καλύτερη ζωή στον Άδη.

Η διαφορά ανάμεσα στους πιστούς αυτών των θρησκευτικών τελετών της εποχής και στους Πυθαγορείους είναι πως οι μεν πρώτοι το κάνουν καθαρά από υποχρέωση στο θρησκευτικό καθήκον. Αντίθετα οι Πυθαγόρειοι το κάνουν με στόχο τον ευνοϊκό κύκλο της μεταθανάτιας ζωής τους. Μέσα από την εξάντληση του σώματος στοχεύουν στην ολική εξάγνιση της ψυχής τους. Που σημαίνει πως για πρώτη φορά η ψυχή και το σώμα είναι δύο διαφορετικές οντότητες, αυθύπαρκτες και ανεξάρτητες, και εδώ είναι που ο Πυθαγόρας επαναστατεί στο θρησκευτικό κομμάτι. Η ψυχή αυτονομείται, και η καλλιέργειά της γίνεται το πρωταρχικό καθήκον στις κοινότητες των Πυθαγορείων. Με τη σιωπή, τη νηστεία, το αυστηρό τελετουργικό, την ομαδική ζωή, με θρησκευτικές πρακτικές δηλαδή οι μαθητές του Πυθαγόρα προσδοκούσαν τη σωτηρία της ψυχής τους.

Η ολιστική του προσέγγιση σε σχέση με τη μετεμψύχωση, είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη

51 Η Ορφική λατρεία αποδίδεται στον Ορφέα. Από τους πιο γνωστούς μουσικούς και ποιητές των αρχαίων χρόνων και ιδρυτής των Ελληνικών Μυστηρίων. Υπήρξε αρχιερέας του Απόλλωνα και του Διόνυσου και στη μουσική του καταλογίζονται μαγικές ιδιότητες, με το ποιο γνωστό μύθο αυτόν της Ευριδίκης.

Ο Ορφισμός χρονολογείται περίπου από τον 5ο αιώνα π.Χ. Εξαιτίας των στενών σχέσεων Αθήνας και Ιταλίας, δεν έχει εμπεριστατωθεί από που ξεκίνησε η λατρεία αυτή. Αντικείμενο λατρείας ήταν ο Διόνυσος και δινόταν μεγάλη σημασία στις θυσίες, όπως ακριβώς και στη Πυθαγόρεια σχολή. Επίσης άλλη μια θεώρηση του Ορφισμού, ήταν η μετεμψύχωση από ένα νεκρό ον σε ένα ζωντανό.

Βλ. Δημητριάδου Δάφνη, Αναγνώστου Ευαγγελία, « Ορφική λατρεία », από τον ιστότοπο *Εγκυκλοπαίδεια Μείζονος Ελληνισμού* ( <http://asiaminor.ehw.gr/forms/fLemmaBodyExtended.aspx?lemmaID=8958> ), ημερομηνία προσπέλασης: 18-8-2018

52 Η ψυχή είναι αθάνατη και ότι μπορεί να μεταβαίνει μετά τον θάνατο του σώματος σε άλλα ζωικά είδη.

Βλ. Γογγάκη Κωνσταντίνα, *Ψυχή και σώμα κατά το Πυθαγόρειο δόγμα της μετεμψύχωσης*, ομιλία στην Αθήνα, αίθουσα ΕΛΛΗΝ. Α.Ι.Σ., 27-3-2017 ( <https://www.youtube.com/watch?v=jFeMQ1W0H4o> )

53 Ιάμβλιχος, *Περί του Πυθαγορικού Βίου*, εκδόσεις Ζήτρος, Αθήνα 1975, σελ 96-100

54 Βλ. Ηρόδοτος, *Ιστορίαι* 2.123



μαθηματική του φύση αλλά και τη θεωρία για τους αριθμούς . Συγκεκριμένα υποστήριξαν πως ο άνθρωπος μετενσαρκώνεται κάθε 216 χρόνια κι ο αριθμός δεν είναι τυχαίος. Ο αριθμός 216<sup>55</sup> συμβόλιζε την επανάληψη και την επαναφορά .

Για τους Πυθαγορείους τα μαθηματικά ήταν η οδός για την ανύψωση της ψυχής τους και της ένωσής τους με το Θείο. Ο Θεός είναι η ενότητα, ο κόσμος, η πολλαπλότητα που συντελείται από αντίθετα στοιχεία και η αρμονία φτιάχνει και διατηρεί τα αντίθετα στοιχεία και τα συγκροτεί σε κάτι εννιαίο, τον Κόσμο<sup>56</sup>. Η αρμονία είναι η δύναμη του Θεού και αποτελείται από αριθμητικούς λόγους . Συχνά παρομοίαζε το σύμπαν με τον άνθρωπο. Όπως ο άνθρωπος αποτελείται από τη ψυχή και το σώμα έτσι και το σύμπαν αποτελείται από το πέρας (μέτρο) και το άπειρο. Το μέτρο μπορεί να εκφραστεί πλήρως μέσω των αριθμών. Έτσι ο Πυθαγόρας διατυπώνει την *Θεωρία των αριθμών* , δηλαδή τα πάντα είναι αριθμοί ή μοιάζουν με αριθμούς.

Η σύλληψη των αριθμών από τον Πυθαγόρα προήλθε στη προσπάθειά του να βρει και να κατανοήσει την αρχή των πάντων . Συνεπώς για τον Πυθαγόρα οι αριθμοί είναι τελικά εκείνοι που αποτέλεσαν την αρχή όλων και ανάμεσα σε αυτούς μόνο μπορεί να βρει την ουσία του κόσμου και του σύμπαντος. Έτσι λοιπόν για τον ίδιο οι αριθμοί αποτελούν κάτι το ιερό. Φαίνεται ότι πολλά στοιχεία στη καθημερινή ζωή ο ίδιος τα είχε συμβολίσει με αριθμούς , όπως για παράδειγμα τον άνθρωπο με τον αριθμό 250 , ο αριθμός 2 συμβόλιζε τη γυναίκα ,ενώ ο αριθμός 3 τον άντρα , και μέσα από τον πολλαπλασιασμό τους προκύπτει ο αριθμός 6, που συμβολίζει τον γάμο. Για τους Πυθαγορείους ο αριθμός 6 ήταν ιδιαίτερα σημαντικός μιας και ήταν ο πρώτος τέλειος αριθμός και εκτός από τον γάμο συμβολίζει την υγεία και την ισορροπία . Χώρισαν τους αριθμούς σε περιττούς και άρτιους και αποτέλεσαν θεμελιώδεις έννοιες και για τη φιλοσοφία τους , αφού ο κόσμος για αυτούς έπρεπε να κατανοείται μέσα από τα αντίθετα ζεύγη και οι περιττοί και άρτιοι αποτελούσαν το τέλειο φυσικό ζεύγος αντίθεσης . Γι' αυτό και τους περιττούς τους ονόμαζαν και αρσενικούς ενώ τους άρτιους θηλυκούς. Όλοι οι αριθμοί είχαν τη θέση τους και τη σημασία τους , ωστόσο στην υψηλότερη θέση βρισκόταν η «ιερά τετρακτύς» όπου περιείχε τους πρώτους τέσσερις φυσικούς αριθμούς ( $1+2+3+4=10$ ) ,η οποία συμβολιζόταν και με ένα τέλειο τρίγωνο ,το οποίο αποτελούσε και το επίσημο έμβλημα της σχολής. Στην ιερή τετρακτύ βασίστηκε αργότερα η ανακάλυψη του, πως οι πλανήτες παράγουν συγκεκριμένα μουσικά διαστήματα κατά την κίνηση τους, γνωστή και ως *Αρμονία των σφαιρών* .

Θέτοντας τόσο μεγάλη σημασία στους αριθμούς, ο Πυθαγόρας και η σχολή του προχώρησαν σε σημαντικές ανακαλύψεις που σήμερα είναι θεμελιώδεις για τον κλάδο των μαθηματικών και της γεωμετρίας. Για παράδειγμα η πιο γνωστή του ανακάλυψη δεν είναι άλλη από το *Πυθαγόρειο Θεώρημα* ή *Θεώρημα της Εκατόμβης* <sup>57</sup>. Η θεωρία αυτή , μελετά τη σχέση μεταξύ των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου: «Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις»<sup>58</sup> , δηλαδή « Το τετράγωνο της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι ίσο με το άρθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του. » <sup>59</sup> . Μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε κλάδο επιστήμης και σήμερα μετρά τουλάχιστον 400 αποδείξεις οι οποίες αυξάνονται συνεχώς. Η προέλευση του να μεν αποδίδεται στο Πυθαγόρα, ωστόσο ιστορικά υπάρχουν και

55 Το 216 είναι γνωστό και ως “ψυχογονικός κύβος”διότι σχηματιζόταν από τον αριθμό 6 στο κύβο , δλδ  $6 \times 6 \times 6$  Αδαμάκος Π. « Ο ψυχογονικός αριθμός των Πυθαγορείων», από τον ιστότοπο *Παναγιώτης Θεοδώρου Αδαμάκος* ( <https://www.padamakos.gr/mydocs/o%20psyxogonikos%20arithmos.pdf> ), ημερομηνία προσπέλασης: 30-6-2018

56 Πρώτος διατυπώνει τη λέξη “κόσμος”, όπου σημαίνει τάξη και αρμονία. Ο ίδιος υποστήριζε πως το σύμπαν δημιουργήθηκε από το χάος και εν συνεχεία με το μέτρο και την αρμονία απέκτησε τη μορφή που γνωρίζουμε.

Βλ. Παπαδοπούλου Γεωργία και Ευθυμίου Βασίλης, « Η ιστορία του Πυθαγόρα και του Πυθαγόρειου θεωρήματος », από τον ιστότοπο: *Minisymposium on Public available geometric/topological software* ( <http://users.math.uoc.gr/~jplatis/pythagoras.pdf> ), ημερομηνία προσπέλασης: 30-6-2018

57 Σύμφωνα με την αρχαία παράδοση, μετά την ανακάλυψη του, πρόσφερε στους θεούς θυσίες στην Εκατόμβη, εξού και η ονομασία

58 Ευκλείδης , *Στοιχεία Γεωμετρίας*, Βιβλίο 1ο , 47ο και 48ο θεώρημα.

59  $a^2 = b^2 + \gamma^2$  . - (όπου  $a$  = το μήκος της υποτεινουσας και  $b$  και  $\gamma$  = τα μήκη των δύο άλλων πλευρών)

παλαιότερες αναφορές σε αυτό από τους Βαβυλώνιους και Αιγύπτιους, αλλά και από τους Ινδούς και Κινέζους της εποχής του, κανείς όμως μέχρι τον Πυθαγόρα δε κατάφερε να παρουσιάσει κάποια λογική απόδειξη, τουλάχιστον καταγεγραμμένη<sup>60</sup>. Ο Ευκλείδης<sup>61</sup> χρόνια αργότερα στα βιβλία του *Στοιχεία Γεωμετρίας*, θα παρουσιάσει το Πυθαγόρειο θεώρημα με μια δική του απόδειξη. Θα πρέπει να πούμε πως ο Πυθαγόρας διατύπωσε αυτό το θεώρημα ως γεωμετρική θεώρηση για τα εμβαδά, και αργότερα τον 16ο αιώνα διατυπώθηκε η αλγεβρική του μορφή.

Μια άλλη ανακάλυψη της σχολής είναι η θεωρία της *Χρυσής Τομής*. Ο πρώτος που εισάγει τη θεωρία των τέλειων αναλογιών, της Χρυσής Τομής, ή του αριθμού Φ είναι ο Πυθαγόρας. Την απόδειξη όμως φέρνει ο Ευκλείδης σε ένα εκ των δεκατριών βιβλίων του. Η Χρυσή Τομή συνδέει με ακρίβεια την αρμονία των μαθηματικών με τη φύση και τη τέχνη γι' αυτό και η επιρροή που άσκησε αυτό το θεώρημα ήταν τεράστια ιδιαίτερα στους καλλιτέχνες των μεταγενέστερων εποχών.

Στη προσπάθειά τους διαιρέσουν ένα ευθύγραμμο τμήμα έκοψαν μια ευθεία στα δύο, προσέχοντας η αναλογία του μικρού κομματιού προς το μεγάλο να είναι ίση με αυτή που έχει το μεγάλο τμήμα προς το συνολικό μήκος. Κατά την «Χρυσή Τομή» προκύπτει ο αριθμός 1,618033988749 Ο μοναχός του 15ου αιώνα Luca Pacioli, επηρεασμένος από την αντίληψη της εποχής ότι οι νέες γνώσεις της επιστήμης έπρεπε να ενταχθούν στο εκκλησιαστικό δόγμα, τον ονόμασε «Η θεία αναλογία». Η ονομασία του «χρυσός αριθμός»<sup>62</sup> αποδίδεται στον Leonardo da Vinci και στις αρχές του 20ου αιώνα, ο Αμερικανός μαθηματικός Mark Barr τον προσδιόρισε με το ελληνικό γράμμα Φ, προς τιμήν του γλύπτη Φειδία, ο οποίος με βάση αυτόν τον αριθμό δημιουργούσε τα έργα του και πιο συγκεκριμένα τον Παρθενώνα.

Σήμερα η Χρυσή Τομή, αποτελεί ένα από τους πιο επαναστατικούς κανόνες σε όλους τους χώρους και μπορεί κανείς να την εντοπίσει παντού γύρω του, από πίνακες ζωγραφικής, σε κτίρια, σε πανέμορφα γλυπτά, ακόμη και σε μουσικά έργα<sup>63</sup>.

Είναι πραγματικά εντυπωσιακό, αν σκεφτεί κανείς πως 4.500 χρόνια πριν, χωρίς καμία τεχνολογία, πολλές φορές χωρίς τα αναγκαία εργαλεία, οι επιστήμες έφτασαν σε τόσο υψηλό επίπεδο, ώστε μέχρι και σήμερα να θεωρούνται πρωτοπόρες. Κι αυτά που αναφέραμε πιο πάνω είναι λίγα σε σχέση με αυτά που έκανε ο μεγάλος φιλόσοφος<sup>64</sup>. Η πολυδιάστατη σκέψη του και η ελυσσόμενη ευφυΐα του ήταν που τον έκαναν να φτάσει μέχρι το σύμπαν και να ανακαλύψει πως ακόμα και εκεί υπάρχει μουσική κι ας μη μπορούμε να την ακούσουμε. Κι όσο παράλογο κι αν ακούστηκε, παρ'όλο που με τα δικά του μέσα το επαλήθευσε, χιλιάδες χρόνια αργότερα, θα το επιβεβαιώσει και ακουστικά, ένας από τους μεγαλύτερους διαστημικούς σταθμούς του πλανήτη, η Ν.Α.Σ.Α.

---

60 Χριστιανίδης Γ., *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών. Αιγυπτιακά, Βαβυλωνιακά και Ελληνικά Μαθηματικά*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003

61 Σταμάτης Ε., *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, Βιβλία 1,2,3,4*, Τόμος 1. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών βιβλίων, 1975

62 Σε μαθηματικούς όρους, χρυσός αριθμός είναι εκείνος που αν του προσθέσουμε το 1 θα μας δώσει το ίδιο αποτέλεσμα το οποίο θα έχουμε και αν τον υψώσουμε στο τετράγωνο. Βλ. Livio Mario, *Ο χρυσός λόγος: η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού*, μτφ. Σταυροπούλου Μαριάννα, Αθήνα: Ενάλιος, 2005

63 Ο Μότσαρτ διαίρεσε μεγάλο αριθμό από τις σονάτες του σε δύο μέρη, με χρονική αναλογία ίση με τον αριθμό Φ. Βλ. Μαντζουκίδης Χρ. Κώστας, *Η Χρυσή Τομή στη μουσική*, Αθήνα: Ζήτη, 2018

64 Ο Πυθαγόρας δημιούργησε πρώτος τον «Πυθαγόρειο πίνακα» ή «Αβακα», έναν πίνακα πολλαπλασιασμού ή αλλιώς έναν πίνακα της προπαίδειας, όπου βοηθάει στην εύρεση του γινομένου των δέκα πρώτων ακεραίων αριθμών.

Βλ. Ηλιάδη Αμαλία, «Για τη ζωή και το έργο του ένδοξου Σάμιου», από τον ιστότοπο *Olympia.gr* (<https://olympia.gr/2013/12/03/%CF%80%CF%85%CE%B8%CE%B1%CE%B3%CE%BF%CF%81%CE%B1%CF%83-%CE%BF-%CE%BA%CE%BF%CF%81%CF%85%CF%86%CE%B1%CE%AF%CE%BF%CF%82-%CF%84%CF%89%CE%BD-%CE%B5%CE%BB%CE%BB%CE%B7%CE%BD%CF%89%CE%BD-%CE%BF-%CE%B5%CE%BB/>), ημερομηνία προσπέλασης: 17/8/2018

## 2.3 Η Αρμονία των Σφαιρών

Η μουσική αποτελούσε ένα από τα πιο σημαντικά μαθήματα στο πρόγραμμα της σχολής των Πυθαγορείων. Για τον Πυθαγόρα η μουσική έπαιζε σημαντικό ρόλο στην ηθική διαμόρφωση του χαρακτήρα του ανθρώπου, αντίληψη που την ασπάστηκε αργότερα και ο Πλάτωνας. Εξάλλου η μουσική κατά την αρχαιότητα ήταν βασικό μάθημα στη διαπαιδαγώγηση των νέων. Εκτός όμως από τον παιδαγωγικό και ηθικοδιδασκτικό της χαρακτήρα, η μουσική έκρυβε και τη δική της φιλοσοφία. Γι' αυτό και οι φιλοσοφικές αναζητήσεις του αρχαίου ελληνικού κόσμου έφτασαν μέχρι αυτή και όπως αποδुकνείται η σχέση φιλοσοφίας και μουσικής είναι αρκετά στενή, τόσο ώστε οι Πυθαγόρειοι και μετέπειτα ο Πλάτωνας<sup>65</sup> ονόμαζαν τη φιλοσοφία “μουσική.” Κανένας όμως μέχρι στιγμής δεν έφερε στο προσκήνιο τη μαθηματική φύση της μουσικής, μέχρι τον Πυθαγόρα.

Για τον φιλόσοφο η μουσική ήταν επίσης ένας αριθμός, δηλαδή μπορούσε να εκφραστεί απόλυτα μέσα από τις αριθμητικές σχέσεις. Μέσα από το μονόχορδο αλλά και με ακριβείς μαθηματικούς υπολογισμούς προσδιόρισε τους λόγους των μουσικών διαστημάτων. Με λίγα λόγια, όσα μέχρι τότε υπήρχαν και διαιωνίζονταν στη θεωρία της μουσικής βάση της εμπειρίας, ο Πυθαγόρας τα απέδειξε μέσα από τα μαθηματικά.

Πριν προχωρήσουμε όμως στις βασικές μουσικομαθηματικές θεωρίες του φιλοσόφου, θα πρέπει να προσδιορίσουμε βασικά αντικείμενα και όρους που χρησιμοποίησε ο φιλόσοφος κατά την έρευνά του.

Αρχικά το μονόχορδο ήταν ένα όργανο που δημιούργησε ο Πυθαγόρας, προς έρευνα των μουσικών διαστημάτων. Αποτελούνταν από ένα μακρόστενο ηχείο με μια χορδή που τεντωνόταν πάνω από ένα διαβαθμισμένο κανόνα και έναν μετακινούμενο καβαλάρη. Παρατήρησε πως αν χτυπούσε ολόκληρη τη χορδή παρήγαγε έναν ήχο Α. Αν όμως χτυπούσε τα τρία τέταρτα της χορδής παραγόταν η τετάρτη του φθόγγου. Έτσι ανακάλυψε τα διαστήματα μια σχέση απόλυτα σταθερή ανάμεσα στο μήκος των χορδών του οργάνου και των βασικών συγχορδιών ( $1/2$  για την όγδοη,  $3/2$  για την πέμπτη και  $4/3$  για την τέταρτη). Αυτές οι αρμονικές σχέσεις έγκειτο στο ότι περιλάμβαναν τους τέσσερις πρώτους φυσικούς αριθμούς (1, 2, 3, 4), το άθροισμα των οποίων ισούται με το 10, την ιερά Τετρακτύς.

Τι ορίζεται όμως διάστημα στη θεωρία της μουσικής του Πυθαγόρα; Η σχέση μεταξύ δύο αριθμών, αυτό δηλαδή που ονομάζουμε σήμερα στην άλγεβρα και τη γεωμετρία λόγος<sup>66</sup>, στη μουσική θεωρία του Πυθαγόρα, ονομάζεται « διάστημα » ή « Αρμονικός λόγος »<sup>67</sup>.

Ωστόσο η λέξη « διάστημα » ήταν διφορούμενη. Διάστημα ήταν η αριθμητική σχέση με την οποία εκφραζόταν ο λόγος του μουσικού διαστήματος, αλλά ήταν σύμφωνη και με την καθημερινή έννοιά της και το « τμήμα ευθείας », δηλαδή την απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Με αυτό το τρόπο ο Πυθαγόρας ανακάλυψε τη σχέση ανάμεσα στο μήκος των χορδών και το τονικό ύψος που δίνουν. Σε αυτό έπαιξε σημαντικό ρόλο και η “ ιερά τετρακτύς ”, αφού περιείχε όλους τους μουσικούς λόγους, στους δέκα πρώτους αριθμούς :

65 Μαρτυρία του Στράβωνος, Παράρτημα Α.4, *Στράβωνος Γεωγραφικά*, Βιβλίο 10.3, C468,10

66 Ο λόγος -μέσος είναι μια ποσότητα που έχει αξία διάμεση μεταξύ δύο άλλων αξιών και υπολογίζεται από ειδική φόμουλα ή ένα σύνολο από προϋποθέσεις. Η φόμουλα του αρμονικού λόγου, έχει ως εξής:

Αρμονικός Λόγος:  $H = 2\alpha\gamma / (\alpha + \gamma)$  ή  $(\alpha - \beta) / \alpha = (\beta - \gamma) / \gamma$

Βλ. Nexus Network Journal, Architecture's and Mathematics Online, The Geometer's Angle No5: Geometric and Harmonic Means and Progressions

67 Αρμονικός λόγος, είναι ο λόγος του τετραγώνου του γεωμετρικού λόγου προς τον αριθμητικό λόγο  $H = G^2 / A$ . Αργότερα ο “ Αρμονικός λόγος ”, μετονομάστηκε από τον Αρχύτα και τον Ίππασο και σε « Αρμονικό κύκλο », καθώς παρατήρησαν πως παράγει τόσο αρμονικούς όσο και τονικούς λόγους

Βλ. Henle Jim, « Classical Mathematics », *The American Mathematical Monthly* (1996 ), 103(1) , σελ.19

|     |   |                      |
|-----|---|----------------------|
| 2:1 | → | Οκτάβα               |
| 3:2 | → | Διάστημα 5ης καθαρής |
| 4:3 | → | Διάστημα 4ης καθαρής |
| 3:1 | → | Οκτάβα και 5η καθαρή |
| 4:1 | → | Δύο Οκτάβες          |

Έτσι με απλές μαθηματικές πράξεις ο Πυθαγόρας κατάφερε να αποδώσει τη βάση σχεδόν όλων των μουσικών ζευγών, πεντατονικών, χρωματικών δυτικών και αραβικών . Εξετάζοντας αυτό το σύστημα δηλαδή τη μουσική κλίμακα, βρήκε συχνότητες και μαθηματικές σχέσεις μεταξύ τους και πάνω σε αυτές πρωτοδιατυπώνει τη θεωρία της *Αρμονίας των σφαιρών*. Το σύστημα αυτό θα ονομαστεί αργότερα από τον Νεύτωνα *φασματοκοπία* ωστόσο ο Πυθαγόρας θα την έχει εφεύρει τυχαία χωρίς να το γνωρίζει.

Η Αρμονία των σφαιρών υποστηρίζει πως και η φύση και τα ουράνια σώματα υπακούν στους ίδιους κανόνες που διέπουν την αρμονία των ήχων στη μουσική .

Από τις σπουδές του στους λαούς της τότε Ανατολής, ήξερε πως για κάθε γνωστό πλανήτη και άστρο είχαν αποδοθεί συγκεκριμένοι αριθμοί , δηλαδή μια συγκεκριμένη αριθμητική αξία η οποία αντιπροσώπευε τις ενδοπλανητικές αποστάσεις. Όμως ο ίδιος εκτός από το ότι υποστήριξε πως η Γη είναι σφαιρική και μέρος ενός συνόλου από άλλες ομόκεντρες σφαίρες , υποστήριξε και πως τα πλανητικά σώματα μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια και στη κυκλική τους κίνηση<sup>68</sup>. Κι αφού όλα ήταν αριθμός και σε αυτά άνηκε και η μουσική συνεπώς το σύμπαν έπρεπε να είναι μουσικό . Το μόνο που έπρεπε ήταν να αποδείξει τη σχέση μεταξύ μουσικής και σύμπαντος<sup>69</sup>.

Αντιστοίχισε λοιπόν τους τότε γνωστούς πλανήτες με μια μουσική κλίμακα. Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός στο Εγχειρίδιο 3 υποστηρίζει ότι τα ονόματα των επτά μουσικών φθόγγων προήλθαν από τους επτά πλανήτες και τη θέση τους σε σχέση με τη Γη. Η Σελήνη που βρίσκονταν πιο κοντά ήταν η χαμηλότερη νότα (νήτη) και ο Κρόνος που ήταν πιο μακριά ήταν η ψηλότερη νότα (υπάτη). Οι ονομασίες των τότε γνωστών πλανητών ήταν οι εξής:

|          |   |          |
|----------|---|----------|
| Σελήνη   | → | Νήτη     |
| Ερμής    | → | Παρανήτη |
| Αφροδίτη | → | Παραμέση |
| Ήλιος    | → | Μέση     |
| Άρης     | → | Λιχανός  |
| Δίας     | → | Παρυπάτη |
| Κρόνος   | → | Υπάτη    |

Βασική πεποίθηση των Πυθαγορείων ήταν πως υπάρχει ένας κεντρικός άξονας<sup>70</sup>, γύρω από τον οποίο κινείται σε κυκλικές κινήσεις η Γη, ο ήλιος, οι πλανήτες και οι διάφοροι αστέρες. Ωστόσο η

68 « ἐξ ἀνομοίων μὲν καὶ ποικίλως διαφερόντων ῥοιζήματων ταχῶν τε καὶ μεγεθῶν καὶ ἐποχήσεων» (ἐξ ἀνόμοιων μὲν καὶ ποικίλων ταχύτατων ἡχῶν καὶ μεγεθῶν καὶ συνακόλουθων στοιχείων) .

Βλ. Ιάμβλιχος , *Περὶ Πυθαγόρειου βίου*, 938 – 958

69 Οι ποιητές της Ομηρικής εποχής κατά κάποιον τρόπο είχαν διατυπώσει αυτή τη θεωρία. Στον ομηρικό ύμνο προς τιμήν του Άρη , οι πλανήτες επικαλούνται ως ένα είδος χορωδίας .Επίσης σύμφωνα με μαρτυρίες κατά τον 7ο αιώνα π.Χ ο ποιητής Τέρπανδρος πρόσθεσε την έβδομη χορδή στη λύρα με σκοπό την παραγωγή της πλανητικής μουσικής.

Σπυρίδης, Χαράλαμπος Χ. , « Η μουσική των σφαιρών των Πυθαγορείων », από τον ιστότοπο *Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστήμιων Αθηνών* ( <http://users.uoa.gr/~hspyridis/kallipateira.pdf> ), ημερομηνία προσπέλασης: 20-8-2018

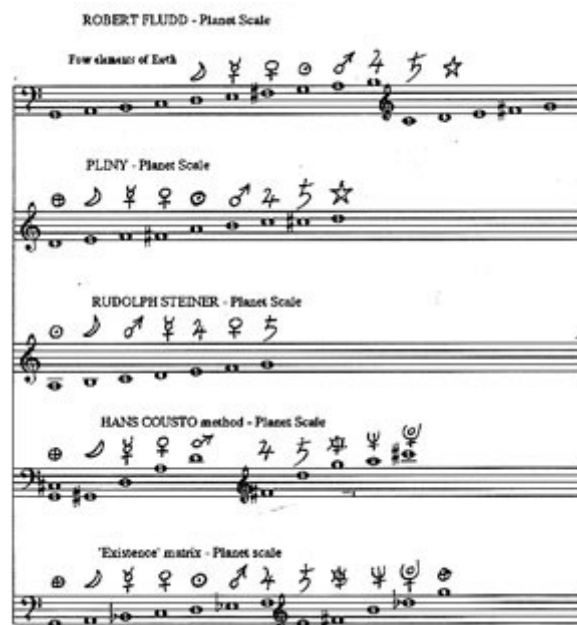
70 Υποστήριζαν πως η Γη είναι σταθερή και όλα τα υπόλοιπα σώματα κινούνται γύρω από αυτή, το λεγόμενο γεωκεντρικό σύστημα

Βλ. Γαβρόγλου Κ., Διαλέτης Δ., Χριστιανίδης Γ, «Αντιλήψεις για την κίνηση της Γης στην αρχαία ελληνική αστρονομία», Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Αρίσταρχος ο Σάμιος. 17-19 Δεκ 2005.

αλληλουχία που είχαν οι πλανήτες αντιστοιχούσε κατά τον ίδιο σε μια συγκεκριμένη σειρά νοτών. Έτσι με αυτό το τρόπο κάθε έναστρη νύχτα προέκυπτε η αρμονία των σφαιρών όπου κάθε φορά διέφερε ανάλογα με τις θέσεις των πλανητών. Παρακάτω παρουσιάζεται ο πίνακας με την αντιστοιχία των νοτών, όπως την όρισε ο Πυθαγόρας

| ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ | ΠΛΑΝΗΤΕΣ | ΔΑΧΤΥΛΑ          | NOTES    |
|-------------|----------|------------------|----------|
| A           | Σελήνη   | Νήτη             | Ρε       |
| E           | Ερμής    | Παρανήτη         | Ντο      |
| H           | Αφροδίτη | Τρίτη συννήμενων | Σι ύφεση |
| I           | Ήλιος    | Μέση             | Λα       |
| O           | Άρης     | Λιχανός          | Σολ      |
| Y           | Δίας     | Παρυπάτη         | Φα       |
| Ω           | Κρόνος   | Υπάτη            | Μι       |

Υπέθεσε λοιπόν πως για να υπάρχουν “πλανητικές” νότες με κάποιο τρόπο θα πρέπει και να παράγονται.



Εικόνα 3: Οι κλίμακες των πλανητών

Τόσο ο ίδιος όσο και οι μαθητές του κατέληξαν στο συμπέρασμα πως η περιφορά του εκάστοτε πλανήτη επί της τροχιάς του σε συνάρτηση με την τριβή του αιθέρα παράγει συγκεκριμένο ήχο, όπου το τονικό του ύψος καθορίζεται από την ακτίνα κάθε τροχιάς και την ταχύτητα περιστροφής του κάθε πλανήτη<sup>71</sup>. Δηλαδή παρατήρησαν πως για να υπάρξει ήχος έπρεπε να υπάρξει κάποια τριβή ή σύγκρουση μεταξύ των πλανητών κι αφού αυτό δε μπορούσε να γίνει εξαιτίας της διαφορετικής κίνησης και συχνότητας του καθένα, επιτυγχανόταν κατά την συνάντησή τους, είτε με την επιβράδυνση τους είτε κατά την προσπέραση αυτών. Αυτό σημαίνει πως για κάθε ουράνιο

71 Για να διαδοθεί ένας ήχος από ένα σημείο σε ένα άλλο, απαιτείται η παρεμβολή ενός οποιοδήποτε υλικού μεταξύ των δύο σημείων, π.χ αέρας.

Βλ. Παπαδογιάννης Νεκτάριος, *Κυματική φυσική : Για μηχανικούς ήχου και ακουστικής*, Αθήνα : Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015



σώμα, η μουσική που παράγεται είναι διαφορετική.

Τα ουράνια σώματα, βρίσκονται σε τέτοια διάταξη έτσι ώστε να έχουν σχέση μεταξύ τους βάσει των μουσικών αναλογιών και παράγουν μια μελωδία η οποία δονείται μέσω της κίνησής τους. Ο Πυθαγόρας ισχυριζόταν πως μπορεί να ακούσει αυτές τις μελωδίες, όταν συγκέντρωνε την ακοή του<sup>72</sup>. Ωστόσο, στη θεωρία του υπήρξε ένα πρόβλημα, που βέβαια ο ίδιος δε μπορούσε να το ξέρει, όμως για εμάς πλέον είναι αποδεδειγμένο.

Στο διάστημα υπάρχει κενό και ο ήχος δε διαδίδεται στο κενό. Συνεπώς στη περίπτωση που οι πλανήτες όντως παρήγαγαν μουσική, είναι σχεδόν απίθανο να έφτανε μέχρι εμάς. Στο διάστημα ο ήχος ενυπάρχει σαν ηλεκτρομαγνητική δόνηση. Οπότε υποθέτουμε πως με την λέξη “άκουγε”, εννοούσε πως μόνο εκείνος μπορούσε να βρει αυτή τη μουσική σχέση μεταξύ των πλανητών.

Εκτός όμως από την συμπαντική μουσική που πρόσφερε στους ανθρώπους, ο Πυθαγόρας κατάφερε με τη βοήθεια των μουσικών διαστημάτων να υπολογίσει πρώτος σε Δελφικά στάδια<sup>73</sup> τις ενδοπλανητικές αποστάσεις. Υπολόγισε όλες τις αποστάσεις των αστερών και πλανητών, των οποίων το σχήμα, υποστήριζε πως ήταν σφαιροειδές όπως της Γης. Κάθε αστερισμός ή πλανήτης έχει δική του κίνηση, ήχο και επιρροή, τόσο σε εκείνον όσο και στους γύρω αστερισμούς<sup>74</sup>. Για παράδειγμα η μουσική απόσταση μεταξύ Γης και Σελήνης υπολογίστηκε από τον ίδιο ένα τόνο και η μετρική απόστασή τους 126.000 Δελφικά στάδια, με τη σημερινή μονάδα 22.371.300 μέτρα<sup>75</sup>. Η απόσταση μεταξύ της Σελήνης με τον Ερμή είναι μισός τόνο, ενώ ο πλανήτης της Αφροδίτης απέχει από τον Ήλιο μόλις ενάμιση τόνο. Χάρη σε αυτούς τους υπολογισμούς ο ίδιος διαπίστωσε πως όλοι οι ταχύτατα κινούμενοι αστέρες βρίσκονταν κοντά στη Γη, ενώ οι πιο αργά κινούμενοι μακριά. Ωστόσο οι αστρονόμοι της εποχής παρατήρησαν και κάτι ακόμη. Ορισμένα άστρα παρέμεναν σταθερά στον ουρανό. Επειδή αδυνατούσαν στην εξήγηση της σταθερότητας που διέπει αυτά τα ουράνια σώματα τα συνέδεσαν με μία σταθερά. Δηλαδή θεώρησαν πως όλα αυτά είναι συνδεδεμένα με μια μαύρη σφαίρα που καθόριζε την άκρη του σύμπαντος. Με τη σειρά τους οι κινούμενοι αστέρες ήταν συνδεδεμένοι έκαστος με μία σφαίρα. Να τονίσουμε πως οι τότε γνωστοί πλανήτες ήταν επτά η Γη, η Σελήνη, ο Ερμής, ο Άρης, η Αφροδίτη, Δίας και ο πιο μακρινός ο Κρόνος. Το επτά δεν ήταν τυχαίο για τον Πυθαγόρα. Το επτά ήταν αριθμός της Ιερής Τετρακτύς και εφόσον επτά ήταν οι νότες της κλίμακας του τις συνέδεσε και πλανητικά.

Η θεωρία αυτή επηρέασε για πολλά χρόνια, πολλά από τα γνωστά ονόματα της φυσικής, των μαθηματικών και της αστρονομίας που ξέρουμε σήμερα. Για παράδειγμα ο Κέπλερ<sup>76</sup> προσπάθησε να προσαρμόσει την τροχιά των πλανητών στη μουσική κλίμακα. Πολλοί επιστήμονες ήταν εκείνοι

72 « Και τοῖς μὲν εταίροις ἠρμόζετο ταῦτα, αὐτὸς δὲ τῆς τοῦ παντός ἁρμονίας ἠκροᾶτο συνειὶς τῆς καθολικῆς τῶν σφαιρῶν καὶ τῶν κατ’αὐτάς κινουμένων ἀστέρων ἁρμονίας, ἧς ἡμᾶς μὴ ἀκούειν διὰ σμικρότητα τῆς φύσεως », Πορφύριος, *Βίος Πυθαγόρα*, 30.3-7

73 Το δελφικό στάδιο ήταν μονάδα μέτρησης μήκους κατά την Αρχαιότητα. Υπολογιζόταν όσο ένα μήκος σταδίου, δηλαδή 600 πόδια ενώ σήμερα αντιστοιχεί σε μήκος 195,15 μέτρων. Από πόλη σε πόλη το μήκος του σταδίου εναλλασσόταν, ανάλογα με τις εκάστοτε αναλογίες του αθλητικού σταδίου της περιοχής. Τα δελφικά στάδια είχαν μήκος 177,55 μ.

Βλ. *Νεώτερο εγκυκλοπαιδικό Λεξικό Ηλίου*, τ.17 σ.196

74 Εδώ βασίστηκε η άποψη πολλών μεταγενέστερων ανθρώπων, πως ο χαρακτήρας και η συμπεριφορά του ανθρώπου, μπορούν να επηρεαστούν από τους αστερισμούς, ανάλογα με το σε ποιόν ανήκει και τότε έχεις γεννηθεί, τα επωνομαζόμενα σήμερα “ζωόδια”. Ωστόσο αυτή η θεωρία, ονομάστηκε *Θεωρία των επιρροών*.

Βλ. Χαριτάκη Μαρία, « Η περί του κόσμου θεωρία του Πυθαγόρα », από τον ιστότοπο *Θεοσοφική εταιρεία εν Ελλάδι* (<http://www.theosophicalsociety.gr/index.php/2013-08-31-19-16-39>), ημερομηνία προσπέλασης: 30-8-2018

75 Αρκετούς αιώνες αργότερα θα τον επιβεβαιώσουν και θα ανακαλύψουν περισσότερες αποστάσεις σχεδόν με απόλυτη ακρίβεια οι Γιόχαντ Μπόντε και Τίτιους, γερμανοί αστρονόμοι. Ο κανόνας του παύει να εφαρμόζεται στους νέους πλανήτες που έχουν ανακαλυφθεί

Βλ. Nieto, M. M., *The Titius-Bode law of planetary distances: its history and theory*, Oxford: Pergamon Press, 1972

76 Ο Johannes Kepler γεννήθηκε στις 27 Δεκεμβρίου του 1571 και είχε Γερμανική καταγωγή. Ήταν μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος. Το 1596 δημοσιεύει το πρώτο του συγγραφικό έργο περί κοσμολογίας υπό τον τίτλο « *Mysterium Cosmographicum* ». Εισήγαγε και θεμελίωσε πολλές θεωρίες περί κινήσεων πλανητών και γενικά τη φύση και τη λειτουργία του ηλιακού μας συστήματος. Πέθανε στις 17 Νοεμβρίου του 1630

Βλ. Westman Robert S., « Johannes Kepler », από τον ιστότοπο *Encyclopaedia Britannica* (<https://www.britannica.com/biography/Johannes-Kepler>), ημερομηνία προσπέλασης: 20-8-2018



που ξεκίνησαν την επιστημονικής τους πορεία μελετώντας πρώτα τη μουσική για την κατανόηση της φυσικής και της αστρονομίας.

Παρ' όλα αυτά ο Πυθαγόρας άφησε πίσω του πολλά πράγματα που έμειναν αναπάντητα, είτε γιατί δε τα σκέφτηκε και από την άλλη οπτική τους, είτε γιατί ούτε ο ίδιος μπορούσε να βρει κάποια απάντηση. Για παράδειγμα δεν μας απάντησε ποτέ για τη συχνότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη με το μήκος ή γιατί τείνουμε να δείχνουμε ενδιαφέρον για αυτά τα διαστήματα; Έδωσε όμως σπουδαίες βάσεις για την μετέπειτα μελέτη αυτών των ερωτημάτων.

Κι αν σας έλεγα πως όλη αυτή η θεωρία και οι νόμοι δε σχετίζονταν μόνο με την επιστημονική τους πλευρά αλλά και με την εσωτερική φύση του ανθρώπου;

Πως όλα αυτά ήταν ένας τρόπος να διδάξουν την ψυχική ηρεμία που χρειάζεται η ανθρώπινη ψυχή;

Για τους Πυθαγορείους οι νόμοι της μουσικής επιδρούν στον εσωτερικό κόσμο του ανθρώπου μέσω της αρμονίας. Εφόσον η αρμονία της μουσικής ταυτίζεται με την αρμονία του σύμπαντος, άρα το σύμπαν ταυτίζεται με την αρμονία της ψυχής, δηλαδή το εσωτερικό ανθρώπινο σύμπαν, τη ψυχή. Αν διαταραχθεί η ισορροπία εμφανίζονται οι ψυχικές ασθένειες. Επομένως η ίδια η υγεία είχε να κάνει και με τον σωστό εναρμονισμό σώματος και ψυχής, με το σύμπαν, τη διατροφή, της μουσικής αλλά και με τους θείους νόμους.

Φυσικά ο Πυθαγόρας δεν ήταν ο μόνος που έψαξε την βαθύτερη επιστημονική ερμηνεία της μουσικής. Μεταγενέστεροι πυθαγόρειοι φιλόσοφοι παρουσίασαν και απέδειξαν σημαντικές θεωρίες. Ο Ίππασος ο Μεταποντίνος κατά το πρώτο μισό του 5ου π.Χ αιώνα προσδιόρισε ακριβώς τις μαθηματικές σχέσεις των διαστημάτων. Ο Φιλόλαος στο ύστερο μισό του 5ου π.Χ αιώνα διαίρεσε την αρμονία, δηλαδή την οκτάβα. Τέλος ο Πλάτωνας ( 428-347π.Χ) διατύπωσε τη θεωρία των ιδεών “ *Η αρμονία είναι κάτι αόρατο και χωρίς σωματική -υλική υπόσταση και κάτι πανέμορφο και θεϊκό στην καλοκοιμισμένη λύρα* ”<sup>77</sup>

Στην *Αρμονία των σφαιρών* σήμερα ο κανόνας δουλεύει μέχρι τον πλανήτη του Κρόνου και μάλιστα συνέβαλε και στην ανακάλυψη αστεροειδών μεταξύ των πλανητών Άρη Δία και Ουρανού στα τέλη του 18ου αιώνα. Μέχρι όμως το 1977 όλα αυτά ήταν θεωρητικά και επιβεβαιωμένα μόνο οπτικά και μαθηματικά. Στις 20 Αυγούστου του 1977 η Ν.Α.Σ.Α αποστέλει στο εξωδιάστημα τα σκάφη « Voyager» 1 & 2 με σκοπό να καταγράψουν οπτικά και ακουστικά δεδομένα.

20.000.000.000 χιλιόμετρα από τον πλανήτη μας αποστέλλονται τα πρώτα στοιχεία. Μέσα από είδικα κατασκευασμένα όργανα όπως το Injun , Isee 1 και το Hawkeye ειδικοί διαστημικοί ανιχνευτές και χρησιμοποιώντας κεραία καταγραφής κυμάτων, εγγράφησαν όλες οι δονήσεις που δύναται να ακούσει το ανθρώπινο αυτί ( 20- 20.000 Hz). Οι καταγεγραμμένοι ήχοι, είναι αποτέλεσμα πολύπλοκων αντιδράσεων φορτισμένων ηλεκτρομαγνητικών σωματιδίων από τον διαστημικό άνεμο, την μαγνητόσφαιρα και την ιονόσφαιρα του διαστήματος. Παρακάτω θα ακούσουμε ορισμένους ήχους από τους πλανήτες που καταγράφηκαν.

## Ο ΗΛΙΟΣ



## Ο ΔΙΑΣ



## Ο ΕΡΜΗΣ



## Η ΓΗ



---

77 Βλ. Πλάτωνος, *Φαίδων*, (παράρτημα Α.5, 85Ε.)

Ο ΑΡΗΣ



Η ΑΦΡΟΔΙΤΗ



Ο ΚΡΟΝΟΣ



Ο ΝΕΥΤΩΝΑΣ



Ο ΠΛΟΥΤΩΝΑΣ



Ο ΟΥΡΑΝΟΣ



Κάποιος θα μπορούσε να χαρακτηρίσει αυτούς τους ήχους εξώπραγματικούς ή ακόμη και μη υπαρκτούς, ωστόσο οι ήχοι που προηγήθηκαν είναι η μετάφραση και απόδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εξέπεμψε ο κάθε πλανήτης, προκειμένου να αντιληφθούμε τι πραγματικά εννοούσε ο σπουδαίος φιλόσοφος.

Φτάνοντας ως εδώ και ολοκληρώνοντας το κεφάλαιο αυτό, αντιλαμβάνομαι πως μελετώντας την φιλοσοφική πλευρά της μουσικής επιστήμης υπάρχει μεγάλη αλληλεπίδραση με τη μαθηματική τους φύση κι ας είναι δύο διαφορετικοί κλάδοι. Τα μαθηματικά προβλήματα αλλά και οι λύσεις τους στη θεωρία της μουσικής επηρεάζουν την φιλοσοφική οπτική περί μουσικής και αντιστρόφως ανάλογα. Διότι μέχρι τώρα οι επτά πλανήτες και οι επτά νότες, μας φάνταζαν απλώς ένα τυχαίο γεγονός.

Φαίνεται πως τελικά ο φιλόσοφος προσπαθούσε να απορρίψει την αυθυπαρξία της μουσικής χωρίς τα μαθηματικά και ίσως το ίδιο να συνέβαινε και με τα μαθηματικά κι αυτό είναι κάτι που σίγουρα δε μπορούμε να ανακαλύψουμε και να γνωρίσουμε με σιγουριά, άλλωστε αυτή είναι και η ομορφία της φιλοσοφίας, τίποτα δε μπορεί να αποδειχτεί και τίποτα δεν είναι αυτό που πραγματικά φαίνεται.

## **Κεφάλαιο τρίτο:**

### **« ΙΑΝΝΗΣ ΞΕΝΑΚΗΣ »**

**“ Η μουσική είναι ίσως από τις τέχνες  
η πιο δεμένη με τα μαθηματικά,  
με τη μαθηματική σκέψη,  
από την ίδια τη φύση της.”**

**Ιάννης Ξενάκης**

Η μουσική μπορεί να είναι από τις λίγες τέχνες που μπορεί να συνδυαστεί με άλλους κλάδους και τέχνες, όπως τη ζωγραφική, τα μαθηματικά ακόμη και την αρχιτεκτονική. Η μουσική είναι η τέχνη που οργανώνει τους ήχους που μας περιβάλλουν, με στόχο τη σύνθεση τους, τη παραγωγή, την εκτέλεση και την ερευνά τους.

Ο 20ος αιώνας, ήταν αυτός που προσφέρθηκε και ευνόησε πάσης φύσεως ανατροπή και πρωτοπορία, όχι μόνο στις τέχνες, αλλά σε ότι αφορούσε την ζωή του ανθρώπου, από την τεχνολογία μέχρι την πολιτική. Επειδή πάντα ότι συμβαίνει στο κόσμο αντικατοπτρίζεται μέσα στα έργα τέχνης, έτσι και εδώ η μουσική ανατανακλούσε όλη την αλλαγή, τα καινούργια ρεύματα και τη καινούργια ζωή που ανέτειλλε. Αλλωστε δεν είναι καθόλου τυχαίο που ο 20ος αιώνας, ονομάστηκε ως ο αιώνας της “Νέας Μουσικής”<sup>78</sup>.

Οι αλλαγές αυτές ήρθαν από πρόσωπα που θα μπορούσε να πει κανείς πως προορίζονταν από την αρχή για αυτό το σκοπό και με τη σειρά τους αποτέλεσαν έμπνευση και για άλλους καλλιτέχνες μέχρι και σήμερα. Ο Άρνολντ Σενπεργκ κάνει το πρώτο βήμα με την απόρριψη της τονικότητας στα έργα του, πράγμα εντυπωσιακό και σοκαριστικό για την εποχή, για να καταλήξουμε στον Άντον Βέμπερ, Άρον Κόουπλαντ, Τζον Κέητς και πολλούς άλλους με την απόρριψη της παραδοσιακής μουσικής σύνθεσης, του παραδοσιακού καλλιτέχνη και μουσικού έργου.

Ανάμεσα σε αυτούς ξεχωρίζει και ένας Έλληνας συνθέτης, όχι μόνο για το ατονικό του έργο, αλλά και για την τόλμη του να συνδυάσει τη μουσική του με άλλες τέχνες, όπως η αρχιτεκτονική και τα μαθηματικά. Ο Ιάννης Ξενάκης αποτέλεσε και ενέπνευσε ολόκληρες γενιές τόσο στην ίδια εποχή όσο και αργότερα και εισήγαγε συστηματικά τη μαθηματική σκέψη και σύνθεση στα έργα του, όπως θα δούμε και στη συνέχεια.

### **3.1 Ιστορική αναδρομή**

Ο Ξενάκης γεννήθηκε στη περιοχή Βραΐλα της Ρουμανίας, από Έλληνες γονείς. Μετά το θάνατο της μητέρας τους τα παιδιά στάλθηκαν να σπουδάσουν στη Κοργιαλένιο σχολή<sup>79</sup> στις Σπέτσες, ένα

<sup>78</sup> “Νέα μουσική” ονομάστηκε και τη περίοδο του Μεσσαίωνα (14ος αιώνας) με την ξένη ορολογία “Ars Nova”, ξεκινώντας από τη Γαλλία. Το τίτλο αυτό τον πήρε από τον συνθέτη Philippe de Vitry περίπου το 1320.

Βλ. «Ars Nova», από τον ιστότοπο *Encyclopaedia Britannica* ( <https://www.britannica.com/art/Ars-Nova-music> ), ημερομηνία προσπέλασης: 13-9-2018

<sup>79</sup> Η Ανάργυρος και Κοργιαλένιος σχολή ήταν ιδιωτικό ίδρυμα που ξεκίνησε τη λειτουργία του το 1927. Το πρόγραμμα σπουδών ήταν ελληνικό σε συνδυασμό με μια αμυδρή αγγλική εκπαίδευση. Το 1983 διέκοψε τη λειτουργία

από τα καλύτερα ιδρύματα εκείνης της εποχής. Στο σχολείο αυτό, του δίνεται η ευκαιρία να έρθει ξανά σε επαφή με τη μουσική, κάνοντας μαθήματα πιάνο και θεωρίας της μουσικής<sup>80</sup>. Ο ίδιος, σε αυτοβιογραφικά σημειώματα γράφει, πως δεν είχε καλές σχέσεις με τους καινούργιους του συμμαθητές, με αποτέλεσμα να απομονωθεί και να ζει με τα βιβλία του Ιούλιου Βερν αλλά και μέσα από βιβλία της αστρονομίας.

Μετά την καταδίκη του σε θάνατο το 1951, επειδή λιποτάκτησε από τον Εθνικό στρατό, πέρασε στο Παρίσι όπου εγκαταστάθηκε μόνιμα μέχρι το 1974<sup>81</sup> όπου άρθηκε η καταδίκη του με νομοθετικό διάταγμα επί κυβερνήσεως Καραμανλή. Στο Παρίσι, εξαιτίας της δυσμενούς οικονομικής του θέσης, συντηρήθηκε για κάποιο διάστημα, είτε από φίλους που άνηκαν στο Κομμουνιστικό Κόμμα, είτε από έναν οργανισμό που βοηθούσε πρόσφυγες. Βέβαια η δύσκολη οικονομική του κατάσταση ήταν υπεύθυνη για την πιο μεγάλη και αναμφισβήτητη αξιοσημείωτη συνεργασία της καριέρας του, αυτή με τον Le Corbusier, όταν ο Ξενάκης στάλθηκε για δουλειά ως μηχανικός, από φίλους του στο Πολυτεχνείο. Εν τέλει συνεργάστηκαν για δώδεκα ολόκληρα χρόνια (1947-1959), στον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό μεγάλων έργων όπως το περίπτερο της «Φίλιπς» στη Διεθνή Έκθεση Βρυξελλών το 1958, του σταδίου της Βαγδάτης το 1957 κ.α.

Και όπως συμβαίνει σε κάθε καλλιτέχνη, από τη στιγμή που το οικονομικό θέμα λύνεται, και δεν υποχρεούται να δημιουργεί "κατά παραγγελία", αρχίζει μια διαρκής ενασχόληση με τη σύνθεση, προβάλλοντας κάθε φορά και ένα διαφορετικό-μαθηματικό μοντέλο, προσπαθώντας να κάνει αποδεκτά αυτού του είδους τα έργα. Το 1948 εγγράφεται και ξεκινάει μαθήματα στην Ecole Normale de Musique<sup>82</sup>, αλλά ο καθηγητής σύνθεσης τη σχολή θα τον απογοητεύσει, αφού δε συμφωνεί με τον ιδιαίτερο τρόπο του Ξενάκη. Το ίδιο θα συμβεί και με τη Νάντια Μπουλανζέ, η οποία δε μπορεί να αντιληφθεί αλλά ούτε και να ακολουθήσει τον τρόπο σύνθεσής του. Το αποφασιστικό βήμα για να απελευθερωθεί από τα στερεότυπα και να δημιουργήσει ελεύθερα του το έδωσαν τα δύο χρόνια συνεχόμενων συναντήσεων με τον Ολιβιέ Μεσιάν.

Η αλήθεια είναι, ότι από τα πρώιμα τουλάχιστον έργα του, δε φαίνεται να υπάρχουν συγκεκριμένες μουσικές προτιμήσεις όπως οι υπόλοιποι συνθέτες της εποχής του. Σαφέστατα διακρίνεται μια επιρροή από το Ντεμπισί και τον Ραβέλ, συνθέτες που κράταγαν στα έργα τους το αρχαίο ελληνικό ιδεώδες κι ίσως αυτό να ήταν που τον τράβηξε στη μουσική τους. Όπως δήλωσε και εκείνος αργότερα, χωρίς όμως να εντάσσονται απτά στα έργα του.

Βλέποντας όλη τη ζωή του, παρατηρούμε πως μέχρι τότε δεν είχε ούτε τα μέσα, ούτε και το ιδανικό περιβάλλον για να δράσει το μουσικό του πνεύμα. Αργότερα ο ίδιος θα δηλώσει πως ο μοναδικός τρόπος για να δημιουργήσει ήταν η ικανότητα του να αφαιρεί και να αφαιρείται από την πραγματικότητα. Άλλωστε ποιος άλλος μπορούσε να αντιληφθεί εκείνη την εποχή, μια διαδήλωση και μια οχλοβοή σαν μια άσογη μουσική σύνθεση;<sup>83</sup> Κι όμως αυτή η αποστασιοποίηση από την πραγματικότητα ήταν που τον έφερε στην αρχή της πρωτοπορίας, όταν εισήγαγε για πρώτη φορά την έννοια της πιθανότητας στη μουσική σύνθεση, όταν χρησιμοποίησε τη θεωρία της Χρυσής

---

της και από το 1986 λειτουργεί ως πολιτιστικό κέντρο.

(Βλ. *Αναργύρειο και Κοργιαλένειος Σχολή Σπετσών*, από τον ιστότοπο GRECT (<http://www.grect.com/el/anargyreios-kai-korgialeneios-sholi-spetson/paroysiasi-kai-egkatastaseis>), ημερομηνία προσπέλασης: 12/5/2018)

80 Ο Ξενάκης είχε χάσει τη μητέρα του το 1927 όταν ο ίδιος ήταν πέντε ετών, οπότε μέχρι και το σχολείο είχε χάσει κάθε επαφή με τη μουσική.

(βλ. Δ.Θέμελη, *Ο πρωτοπόρος συνθέτης Ιάννης Ξενάκης*, από τον ιστότοπο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης ([http://users.auth.gr/users/5/0/007005/public\\_html/text/xenakis.pdf](http://users.auth.gr/users/5/0/007005/public_html/text/xenakis.pdf)), ημερομηνία προσπέλασης: 12/5/2018)

81 Βλ. Νομοθετικό Διάταγμα 17/1974 - ΦΕΚ Α-236/2-9-1974, από τον ιστότοπο e-νομοθεσία.gr (<https://www.e-nomothesia.gr/kat-politike-prostasia-psea-pallaike-amyna/nd-17-1974.html>), ημερομηνία προσπέλασης: 17/5/2018

82 Ιδρύθηκε στις 6 Οκτωβρίου του 1919 από τον Alfred Cortot και Auguste Mangeot με στόχο την άριστη μουσική κατάρτιση και την παραγωγή βιρτουόζων, καθώς και την διατήρηση και διάδοση του μουσικού χαρακτήρα της Γαλλίας. (βλ. *Historique*, από τον ιστότοπο: Ecole Normale de Musique de Paris Alfred Cortot (<http://www.ecolenormalecortot.com/ecole-et-etudes/historique/>), ημερομηνία πρόσπελασης: 18-5-2018)

83 βλ. Xenakis Iannis, *Musiques formelles*, Παρίσι: Stock, 1981 (επανεκδόση), σ. 19

Τομής και την ακολουθία Φιμπονάτσι<sup>84</sup>, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Από το 1953 και μετά, ο Ξενάκης κάνει στροφή ως προς τον τρόπο και το ύφος των συνθέσεών του. Επικεντρώνεται σε ένα μηχανισμό που σχετίζεται με οχτώ διάφορα τονικά ύψη με διάρκειες που ακολουθούν τους τέσσερις πρώτους αριθμούς της ακολουθίας Φιμπονάτσι. Τη σύνθεση αυτή τη στέλνει στον Πιέρ Σεφέρ για να τον φέρει στα σκαλιά του στουντίου συγκεκριμένης μουσικής που διευθύνει ο ίδιος, και τελικά καταλήγει στον Χέρμαν Σέρχεν διευθυντή ορχήστρας. Το πρώτο μεγάλο βήμα έχει γίνει. Τα χειρόγραφα του Ξενάκη βρίσκονται εντός των συνθετικών κύκλων της εποχής και ασχέτως των μικρών αποτυχιών (Ο Σέρχεν αν και ενδιαφέρθηκε για το έργο *Μεταστάσεις*, εν τέλει δε το διήυθνε, δίνοντας τη μπαγκέτα στο διευθυντή Χάνς Ροσμπάουντ), σιγά σιγά παίρνει τη θέση του στη μουσική ζωή του Παρισιού, αλλά και στην ιστορία της. Έτσι στις αρχές του 1960 λοιπόν, ο Ξενάκης αρχίζει να λάμπει ως εξαιρετος συνθέτης. Δύο γεγονότα είναι που τον βοηθούν, η υποτροφία στο δυτικό Βερολίνο αλλά και η πρόσληψή του ως καθηγητή σύνθεσης, θερινών μαθημάτων σε ένα πανεπιστήμιο της Αμερικής<sup>85</sup>. Από εκεί και πέρα ξεκινάει η άνοδος. Το βιοτικό του επίπεδο βελτιώνεται σημαντικά με αποτέλεσμα να εγκαταλείψει πάσης φύσεως διαφορετική εργασία και να αφιερωθεί ολοκληρωτικά στη μουσική του.

Στη τέχνη του έδωσε το όνομα «στοχαστική μουσική», διότι πίστευε πως ξεκινάει από τα μαθηματικά καταλήγοντας σε κάτι τυχαίο που όμως είναι πιθανό ή και το ανάποδο. Χρησιμοποίησε όπως αναφέραμε αλλά θα δούμε και αναλυτικότερα στη πορεία, τα μαθηματικά και τη θεωρία των πιθανοτήτων, χρησιμοποιώντας τουλάχιστον 15 μαθηματικές θεωρίες μέσα στα έργα του.

Η αλήθεια είναι πως η μουσική του είναι δύσκολη και όχι για όλους. Συνδύαζε τον ήχο με τα φώτα και το χώρο κάνοντας τον ακροατή-θεατή να τα αισθάνεται ενιαία, εντάσσοντάς τον μέσα. Το τελευταίο του έργο, το συνέθεσε το 1997 με τίτλο «Ωμέγα», καθαρά συμβολικός τίτλος και διέκοψε λόγω σοβαρών προβλημάτων υγείας. Ήδη από το 1996 διήυθνε ίσως το μεγαλύτερο όνειρό του, το Κέντρο Σύγχρονης Μουσικής Έρευνας. Το 2001 ανακηρύσσεται επίτιμος διδάκτωρ στο τμήμα Μουσικών Σπουδών του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου και τέσσερις μέρες αργότερα (4-2-2001) αφήνει τη τελευταία του πνοή στο Παρίσι.

Ίσως εκεί, στο Παρίσι, ο Ιάννης Ξενάκης να πήρε μαζί του εν τέλει τη στοχαστική του μουσική και τους κρυμμένους μαθηματικούς θησαυρούς, για να αφήσει σε εμάς τη σκέψη, την έρευνα και την ειλικρινή ακρόαση.

### 3.2 Οι θεωρίες

Ο Ξενάκης δεν υπήρξε μόνο ο σπουδαίος μουσικός και αρχιτέκτων που ξέρουμε εμείς σήμερα. Ο Ξενάκης υπήρξε στοχαστής, φιλόσοφος, και ύστερα όλα τα άλλα. Ίσως για αυτό τα έργα του να έχουν το καθένα τη δική του «ενέργεια»<sup>86</sup>, τη δική του θεώρηση και το δικό του μαθηματικό μοντέλο. Για τον Ξενάκη η σύνθεση εκ του μηδενός αποτελεί μια μάχη τόσο στο δικό του μουσικό κόσμο, όσο και στην ίδια του τη ζωή<sup>87</sup>. Γι' αυτό και από πολύ νωρίς, κύριο μέλημά του είναι το

84 Μαθηματική ακολουθία όπου ο επόμενος αριθμός είναι άθροισμα των δύο τελευταίων, 1,1,2,3,5,8,13,21 κ.λ.π. Ανακαλύφθηκε από τον Λεονάρντο της Πίζας γνωστός και ως Φιμπονάτσι στην αρχή του 13ου αιώνα και ήταν η λύση ένα μαθηματικό προβληματισμό που είχε θέσει ο ίδιος, γνωστός ως «το πρόβλημα των κουνελιών». βλ. Carney Gies Frances, «Leonardo Pisano», από τον ιστότοπο *Britannica.com* (<https://www.britannica.com/biography/Leonardo-Pisano>), ημερομηνία προσπέλασης: 31-5-2018

85 Το 1963 θα δεχθεί πρόταση από τον Α.Κόπλαντ για να διδάξει στο Μουσικό Κέντρο του Μπέρκσαϊρ στο Τάνκλουντ της Μασσαχουσέτης

86 Τη λέξη ενέργεια, που χρησιμοποίησε συγκαταμένα ο ίδιος ο συνθέτης, τη συναντάμε στο άρθρο «Περί χρόνου» με τον Μόρτον Φέλντμαν το 1988

87 "Δεν είμαι βέβαιος ότι υπάρχω παρά μόνο εάν κάνω κάτι το διαφορετικό. Το διαφορετικό είναι μια απόδειξη της ύπαρξης, της γνώσης, της συμμετοχής στα πράγματα του κόσμου [...]"

Βλ. Varga, B. A., *Conversations with Iannis Xenakis*, London: Faber & Faber, 1996, pp. 50

πως να διαφοροποιηθεί , και πως θα επαναδημιουργεί κάθε φορά το εκάστοτε έργο<sup>88</sup> , από μία καινούργια οπτική. Και για να δικαιώσουμε το συνθέτη, δεν ήταν θέμα πρωτοτυπίας , αλλά πλέον θέμα οντολογίας και στοχαστικών προβληματισμών . Η άνευ προηγουμένου θεωρητικοποίηση της μουσικής, ήταν που τον ώθησε να γράψει πολλά μουσικολογικά κείμενα , με τα πιο γνωστά να βρίσκονται στο βιβλίο *Musiques formelles (1963)*. Πριν όμως από όλα αυτά και με στόχο το κάτι διαφορετικό και επαναστατικό στο χώρο της μουσικής, ο Ξενάκης προτείνει την μείξη των τεχνών<sup>89</sup> και μέσα από τον λογικό πυθαγορισμό εισάγει πρώτος τα μαθηματικά και τη φυσική στο κόσμο της μουσικής, δημιουργώντας έτσι κάτι τελείως καινούργιο, όπως θα δούμε και στη συνέχεια. Η « στροφή » στη μουσική έπρεπε να περιλαμβάνει και να βασίζεται σε τρεις βασικές «παραβολές» όπως τις αποκάλεσε , στο *χώρο, τους αριθμούς και τα άεργα*<sup>90</sup> .

Κάπου εδώ, εισάγει και ο ίδιος στη μουσική του τις πιθανότητες ως πρώτο βήμα και στη συνέχεια ποικίλους μαθηματικούς συνδυασμούς και θεωρίες . Αυτά άλλωστε είναι και η αιτία που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το εκάστοτε μουσικό του έργο για μια μαθηματική ανάλυση με πρόβλημα και λύση. Λίγο πριν δούμε αναλυτικότερα κάποιους από τους μαθηματικούς γρίφους που έθεσε στα έργα του, θα σας παραθέσω μια λίστα με όλες τις « Ξενακικές θεωρίες » που χρησιμοποίησε στο σύνολο των έργων του.

- ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
- ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ
- ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
- ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ
- ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΟΣΚΙΝΩΝ
- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΣΥΝΘΕΣΗ
- ΔΕΝΔΡΩΣΕΙΣ
- ΚΙΝΗΣΗ ΜΠΡΑΟΥΝ
- ΚΥΨΕΛΟΕΙΔΗ ΑΥΤΟΜΑΤΑ
- ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ UPIC

Πρώτα έργα με μαθηματικούς λαβύρινθους το *Έρμα (1961)* , *Έοντα ( 1964 )* και *Νόμος α' (1965)* όπου χρησιμοποίησε τη θεωρία της άλγεβρας Boole ,της θεωρίας των συνόλων και τη θεωρία των κοσκίνων.

Η άλγεβρα Boole<sup>91</sup> ονομάζεται αλλιώς και άλγεβρα των λογικών σχέσεων και χρησιμοποιήθηκε αρχικά για το σχεδιασμό και την ανάλυση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων . Η άλγεβρα αυτού του είδους χρησιμοποιεί δύο μεταβλητές ,τις αληθείς και τις ψευδείς (0, 1 ) όπου ονομάζονται και λογικές μεταβλητές. Από την άλλη η θεωρία των συνόλων<sup>92</sup> είναι η θεωρία που μελετά τα σύνολα

88 Αυτή η μέθοδος ονομάστηκε *Πρακτική του μοντάζ*. Ο συνθέτης ξαναπαίρνει το υλικό ενός έργου που έχει υπολογιστεί βάσει μιας θεωρίας για να το ενσωματώσει σε ένα άλλο έργο.

Βλ. Σολωμός Μάκης, *Ιάννης Ξενάκης: Το σύμπαν ενός ιδιότυπου δημιουργού*, Αθήνα: Αλεξάνδρεια, 2008

89 « Sur travail », ήταν ο τίτλος της διατριβής του , όπου υποστήριξε τη μείξη των τεχνών, και η οποία εκδόθηκε σε βιβλίο το 1979.

Βλ. Xenakis Iannis, « Arts/Sciences.Alliages », Paris: Casterman, 1979

90 Βλ. Ξενάκης Ιάννης, « Οι τρεις παραβολές », *ΜΑ (1958)*, p.p 17, 17-18, 18-19

91 Η άλγεβρα Boole εισήχθη και θεμελιώθηκε για πρώτη φορά το 1854 από τον George Boole με το έργο του *An Investigation of the Laws of Thought (Διερεύνηση των νόμων της σκέψης)*. Ωστόσο σαν ορολογία πρωτοχρησιμοποιήθηκε το 1913 από τον Sheffer

Βλ. Halmos, P., *Lectures on Boolean Algebras*, Princeton: Van Nostrand , 1963

92 Η « θεωρία των συνόλων» προτάθηκε από τον Georg Cantor τη δεκαετία του 1870 . Αν και η θεωρία του



που εμπεριέχουν συναρτήσεις και σχέσεις, όπως για παράδειγμα μια ομάδα, σε αντίθεση με τις άλλες μαθηματικές θεωρίες που μελετούν τη δομή. Για τον Georg Cantor που έθεσε τις βάσεις της θεωρίας αυτής, σύνολο ορίζεται κάθε συλλογή αντικειμένων που γίνονται αντιληπτά μέσω της εμπειρίας μας ή της διάνοησής μας, ταξινομούνται και διακρίνονται εύκολα μεταξύ τους.

Από την άλλη η Θεωρία Συνόλων αποφεύγει την αναφορά στη φύση των στοιχείων των συνόλων και τα αντιμετωπίζει καθαρά με τη μαθηματική λογική. Ο Ξενάκης λοιπόν στα έργα αυτά ακολούθησε την εξής μέθοδο. Λαμβάνοντας όλους τους φθόγγους της έκτασης ενός κλασικού πιάνου και του συνόλου δωματίου τους χώρισε σε βασικές ομάδες-σύνολα. Μετά τον διαχωρισμό των συνόλων, ξεκινάει να τα προσθέτει μεταξύ τους όπου προκύπτουν άλλα σύνολα. Έτσι κάθε ενότητα χρόνου ή συνόλου στο έργο εμπεριέχει μία τουλάχιστον νότα από αυτά τα σύνολα. Ο ίδιος κατά την ολοκλήρωση των δύο αυτών έργων τα αποκάλεσε ως « συμβολική μουσική». Ιδιαίτερα το έργο του *Νόμος α'* χαρακτηρίστηκε από τον ίδιο το πιο φιλόδοξο έργο του, όταν μάλιστα έγραψε ολόκληρο άρθρο αφιερωμένο σε αυτό με τίτλο « Προς μία φιλοσοφία της μουσικής», ενώ το ίδιο έργο έγινε αντικείμενο ανάλυσης πολλών θεωρητικών της εποχής.

Επόμενη θεωρία που χρησιμοποίησε σε έργα του ήταν « η κίνηση Brown »<sup>93</sup>. Η κίνηση Brown είναι πολύ απλά ο « χορός» των σωματιδίων κατά την αιώρηση τους σε ρευστά υλικά. Αρχικά η θεωρία αυτή ή πιο σωστά η εξίσωση αυτη διατυπώθηκε από τον Αλβέρτο Αϊνστάιν το 1905. Ο ίδιος παρατήρησε, πως τα μεγάλα σε όγκο αντικείμενα, όταν βυθίζονται σε υγρό περιβάλλον, όλες οι πλευρές του πιέζονται και συγκρούονται με τα μόρια του υγρού και ότι ο αριθμός των ατόμων που προσκρούουν σε κάθε πλευρά του σώματος αυξομειώνεται. Έτσι με βάση αυτή τη παρατήρηση ο Αϊνστάιν δημιούργησε μια εξίσωση η οποία μπορούσε να υπολογίσει το μέγεθος των μορίων αλλά και να προβλέπει τις συγκεκριμένες ιδιότητες των ατόμων των υγρών και των αερίων. Φυσικά και θα αναρωτιέστε πως αυτή η εξίσωση, βοήθησε στη σύνθεση των έργων του Ξενάκη και είναι πολύ απλό. Παίρνοντας παράδειγμα από την κίνηση των μορίων, σχεδίασε μία καμπύλη με τη βοήθεια του υπολογιστή, και άντλησε από εκεί όλες τις μελωδικές γραμμές των έργων *N'Shima* ( 1975) *Cendrees* ( 1974), λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις πιθανές κινήσεις που θα μπορούσαν να εκτελέσουν τα μόρια και τα άτομα των υλικών.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα έργα *Duel* (1959), *Στρατηγική* (1962), και *Linaia -agon* (1972), καθώς ο συνθέτης τα εμπνεύστηκε αι τα δημιούργησε με βάση τη *Θεωρία των Παιγνίων*<sup>94</sup> (*Game theory*).

Η συγκεκριμένη θεωρία, ασχολείται με την λείψη ορθολογικών αποφάσεων σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον. Η θεωρία αυτή είναι ο πλέον αυτοδύναμος κλάδος των μαθηματικών, με ευρεία εφαρμογή στη καθημερινή μας ζωή. Μελετά διάφορες στρατηγικές που πρέπει να ακολουθηθούν

---

παρουσίασε αντιφάσεις, τον 20ο αιώνα προτάθηκαν καινούργια συστήματα αξιωμάτων με το πιο γνωστό αυτό της θεωρίας των συνόλων με το αξίωμα της επιλογής, ή αλλιώς «Zermelo-Fraenkel»

Βλ. Rotman, J., *An introduction to the theory of groups*, New York: Springer-Verlag, 1996

93 Το 1827, ένας βιολόγος ονόματι Ρόμπερτ Μπράουν είχε παρατηρήσει στο μικροσκόπιο τις άτακτες κινήσεις των κόκκων της γύρης μέσα στο νερό. Ονόμασε αυτόν το χορό της γύρης κίνηση Μπράουν, αλλά δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει τα αίτιά του.

Βλ. Ford, Brian J., « Robert Brown, Brownian Movement, and Teethmarks on the Hatbrim », *The Microscope* ( 1991), Vol. 39, pp. 171

94 Η θεωρία πρωτοδιατυπώθηκε κατά τον 18ο αιώνα, από τον James Waldegrave το 1713 αλλά γίνεται γνωστή μέσα από το βιβλίο «Θεωρία παιγνίων και οικονομική συμπεριφορά», το 1944 του John von Neumann και Oskar Morgenstern. Θεωρείται από τις σημαντικότερες θεωρίες στο κόσμο των μαθηματικών. Ο John Forbes Nash εντόπισε ελλείψεις στη θεωρία και το 1950 την ολοκλήρωσε λέγοντας "Πως κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και ενεργειών έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας, σύμφωνα με το οποίο όλοι οι παίκτες σκέφτονται τι μπορεί να διαλέξει ο αντίπαλος τους, προσπαθούν να καταλάβουν τη συμπεριφορά των άλλων και επιλέγουν την στρατηγική τους σύμφωνα με αυτό. επιλέγουν τις πιο συμφέρουσες για αυτούς ενέργειες, γνωρίζοντας και τις επιλογές των αντιπάλων τους" Το θεώρημα αυτό του χάρισε το 1994 το Νόμπελ οικονομίας. Μέχρι σήμερα έχουν βραβευτεί με Νόμπελ για την θεωρία των παιγνίων, περίπου άλλοι δέκα οικονομολόγοι, καθώς με τα χρόνια η θεωρία όλο και συμπληρώνεται ή εξελίσσεται.

Βλ. Osborne, Martin J. & Rubinstein Ariel, *A course in game theory*, Cambridge: MIT Press, 12<sup>th</sup> edition, 1994, pp. 368

για το ατομικό ή ομαδικό καλό , με μοναδικό φυσικά στόχο τη νίκη.

Το πιο γνωστό πρόβλημα στη θεωρία των παιγνίων είναι *Το δίλλημα του φυλακισμένου*<sup>95</sup> όπου επινοήθηκε από τον Merrill Flood και Melvin Dreshe, στη Καλιφόρνια το 1950 κατά τη διάρκεια του Ψυχρού Πολέμου.

Η θεωρία των Παιγνίων χρησιμοποιήθηκε από τον Ξενάκη, για να συνθέσει έργα ελεγχόμενου αυτοσχεδιασμού, όπως τα παραπάνω. Ουσιαστικά τα εκάστοτε ηχητικά γεγονότα, δημιουργούνται ελεύθερα ,αλλά υπόκεινται σε συγκεκριμένους κανόνες, όπως για παράδειγμα ένας αγώνας ποδοσφαίρου. Στο πρώτο από αυτά, για παράδειγμα, το Duel, η ορχήστρα είναι διαιρεμένη σε δύο σύνολα, το καθένα με έναν διαφορετικό μαέστρο. Ο κάθε μαέστρος διαλέγει από μία παλέτα 6 διαφορετικών ενοτήτων, ανάλογα πάντα με την επιλογή και του άλλου μαέστρου. Στη Στρατηγική η διαδικασία επεκτείνεται σε μεγαλύτερη ορχήστρα, αλλά οι κανόνες απλοποιούνται για πρακτικούς λόγους.

Από όλες όμως τις θεωρίες και τα μαθηματικά μοντέλα που ένταξε στις συνθέσεις του, βρίσκω τόσο εγώ όσο και οι αναρίθμητοι μελετητές του, ιδιαίτερα ελκυστική τη *θεωρία των κοσκίνων*. Για πολλούς, ακόμη και για όσους ασχολούνται εντατικά με τα μαθηματικά, είμαι σίγουρη, πως την ακούνε για πρώτη φορά, πόσο μάλλον εμείς που είμαστε απλώς μουσικοί ερευνητές. Κι όμως η θεωρία αυτή είναι η πιο σημαντική στα έργα του συνθέτη ,διότι , αποτελεί τη πρώτη του προσπάθεια για μια οικουμενική μουσική. Πρώτα από όλα όμως, ας εξηγήσουμε τι είναι τα *Κόσκινα*.

Η θεωρία των κοσκίνων, πρωτοδιατυπώθηκε από τον μαθηματικό Ερατοσθένη τον Κυρηναίο ( 276 π.Χ – 194 π.Χ ) και πρωτοπαρουσιάστηκε γραπτώς από τον Νικόμαχο στο βιβλίο « Εισαγωγή στην Αριθμητική » και χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών. Αν υποθέσουμε πως έχουμε έναν άξονα με συγκεκριμένες διαστάσεις με δύο διαθέσιμα σημεία. Οι διαθέσιμες και ευφικτές επιλογές ανάμεσα στα δύο σημεία ονομάζονται κόσκινα και όλο αυτό το σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή οποιασδήποτε κλίμακας. Στη μουσική έχει ως αποτέλεσμα μία εκτός-χρόνου κατασκευή που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη σύνθεση, για παράδειγμα το *κόσκινο των υψών* όπου έτσι αποκαλούσε τις κλίμακες όπου σχημάτιζε από αριθμητικούς τύπους με βάση τις ισοτιμίες του m και τρεις λογικές πράξεις τη σύζευξη, τη διάζευξη και την άρνηση . Κάπως έτσι ο Ξενάκης παρουσιάζει τη θεωρία στο μέτρο 18 του *Νόμος α΄* . Όμως η θεωρία των κοσκίνων δεν τελειώνει εδώ. Είναι τεράστιο κομμάτι του Ξενάκη και του ίδιου του έργου κι ας συμπεριλήφθηκε μόνο σε ένα μέτρο, και χρίζει ιδιαίτερης και μεμονωμένης ανάλυσης για να γίνει κατανοητή, πράγμα που στη συγκεκριμένη στιγμή δε μας χρειάζεται. Η θεωρία των κοσκίνων αναφέρθηκε καθαρά για να κατανοήσουμε λίγο το πως λειτουργεί.

Σε αυτό το σημείο , θα πρέπει να πούμε πως ο Ξενάκης χρονολογούσε τα έργα του σύμφωνα με την αριθμητική σειρά Φιμπονάτσι, ακόμη και τα έργα της ύστερης περιόδου, της ηλεκτροακουστικής μουσικής.

Σύμφωνα με τον ίδιο , το είδος της ηλεκτρονικής μουσικής του κίνησε τη περιέργεια από την αρχή, μιάς και έκρυβε μεγάλες συνθετικές δυνατότητες. Άλλωστε η συμβολή του ήταν και ιστορική, μια και ήρθε να συμπληρώσει το κενό των δύο μουσικών τάσεων που εμφανίστηκαν τη δεκαετία του 50΄, αυτό της « συγκεκριμένης » και « ηλεκτρονικής » μουσικής.

Εξαιτίας της μεγάλης ενασχόλησης του ο ίδιος δημιούργησε το 1979 και το σύστημα UPIC ( *Unité Polyagogique Informatique du CEMAM* ), το οποίο χρηματοδότησε το ίδιο το Υπουργείο Πολιτισμού της Γαλλίας ,δημιουργώντας μια ομοσπονδία με σκοπό την επίβλεψη και προώθηση του, γνωστή ως *Les Ateliers UPIC* . Σκοπός του συνθέτη ήταν να αποδείξει πως το μηχανήμα αυτό μπορούσε να αποτελέσει ένα σημαντικό εργαλείο για τους συνθέτες , αφού θα μπορούσαν να δημιουργήσουν πιο περίπλοκα έργα. Ο ίδιος το απέδειξε το 1978 γράφοντας την πρώτη όπερα μέσω

---

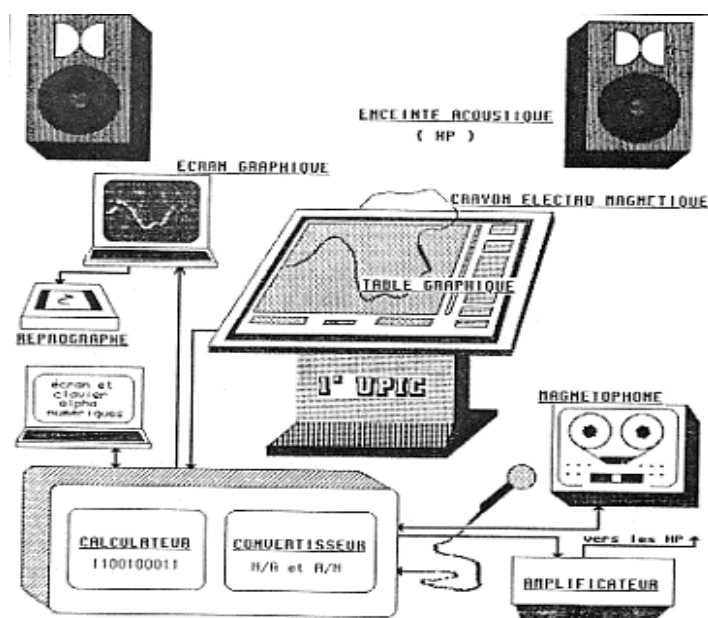
95 Βλ. Μπομπούλα Αγγελική, *Το δίλλημα του φυλακισμένου, το διασημότερο πρόβλημα της θεωρίας παιγνίων* από τον ιστότοπο efsyn.gr ( <http://www.efsyn.gr/arthro/dilimma-toy-fylakismenoy-diasimotero-provlima-tis-theorias-paignion> ), ημερομηνία προσπέλασης: 11-10-2018

του συστήματος αυτού, με τίτλο *Μυκήνες-Άλφα* , όπου πρωτοπαρουσιάστηκε στο φεστιβάλ *Polytope de Mycènes* .Τι είναι όμως το σύστημα UPIC;

Το UPIC είναι ένα άρτιο υπολογιστικό σύστημα το οποίο απαρτιζόταν από δύο μέρη, ένα ηλεκτρονικό σχεδιαστήριο και ένα ηλεκτρονικό μολύβι . Και τα δύο ήταν συνδεδεμένα σε ένα υπολογιστή με ηχεία. Κατά τη σχεδίαση οποιουδήποτε σκίτσου ο υπολογιστής το μετέφραζε την ίδια στιγμή σε οδηγίες σύνθεσης. Έτσι ένα σκίτσο μπορούσε παράλληλα να είναι και μία μουσική σύνθεση<sup>96</sup>. Τα έργα που συντέθηκαν κατά αυτόν τον τρόπο, ανήκουν στη δεύτερη περίοδο της ηλεκτρονικής σύνθεσης του Ξενάκη.

Τέσσερα είναι τα έργα που ανήκουν σε αυτή τη περίοδο, το *Mycenae alpha* (1978), *Taurhiphanie* (1987), *Voyage absoludes Unarivers Andromède* (1989) και η μαγνητοταινία *Pour la Paix* ( 1981). Αυτό ήταν μόνο η αρχή. Αργότερα ο ίδιος χρησιμοποιεί τον προγραμματισμό και πολύπλοκους υπολογισμούς στα έργα του , καθώς και άλλα ηλεκτρονικά προγράμματα όπως το GENDYN<sup>97</sup>, που ολοκλήρωσε το 1991 και εξέταζε τα όρια των αλγορίθμων . Ήταν φανερή η διορατικότητά του σχετικά με την σμίξη της τεχνολογίας και της μουσικής<sup>98</sup>.

Εικόνα 1: Η δομή του συστήματος UPIC



Σήμερα το σύστημα αυτό ,εξακολουθεί να χρησιμοποιείται , τόσο με την αρχική κατασκευή του , όσο και με πιο εξελιγμένα μηχανήματα από το [Centre de Creation Musicale Iannis Xenakis \(CCMIX\)](#) . Παράλληλα έχει δημιουργηθεί ένα ελεύθερο λογισμικό γραφικής αλληλουχίας το [Iannix](#)

96 Βλ. <https://www.youtube.com/watch?v=6KKIeg8tv1Q>

97 Hoffmann, Peter, « The New GENDYN Program », *Computer Music Journal* ( 2000), Vol. 24, pp. 31-38

98 " Όλη η εμπειρία μου τα τελευταία χρόνια με έχει οδηγήσει στην πεποίθηση ότι το μέλλον της μουσικής έγκειται στην πρόοδο της σύγχρονης τεχνολογίας. Αυτό θα επηρεάσει και το πώς δημιουργούμε, αλλά και το πώς ακούμε μουσική. [...] Αλλά περιμένω, επίσης, ότι η τεχνική πρόοδος θα έχει μεγάλη επίδραση και στην ατομική ακρόαση. Χάρη στα συστήματα υπολογιστών, τα οποία μπορούν να ενσωματωθούν στην αλυσίδα ηχητικής παραγωγής, θα είναι δυνατόν για τον ακροατή να ρυθμίζει ατομικά, στο σπίτι, την ποιότητα του ήχου, αλλά και τον όγκο του ήχου, ωφελούμενος από την δυνατότητα να ακούει ξεχωριστά ή ειδικά κάποιο συγκεκριμένο όργανο ή ομάδα οργάνων, ενώ ταυτόχρονα θα βλέπει και την εικόνα των εκτελεστών. Δεν υπάρχει αμφιβολία. Χάρη στην τεχνολογικά, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η μουσική του παρελθόντος, αλλά και η μουσική που θα έρθει, θα είναι η μουσική που δεν έχει ακουστεί ποτέ ξανά. "

Βλ. « Problématiques scientifiques et compositions musicales ( Επιστημονικοί προβληματισμοί και μουσικές συνθέσεις )», Unesco, Académie Européenne des Sciences, des Arts et des Lettres, 1980

εμπνευσμένο από τα έργα του Ξενάκη της ηλεκτρονικής περιόδου , με σκοπό τη ψηφιακή τέχνη.



*Εικόνα 4: Το σύστημα UPIC σήμερα, όπως παρουσιάζεται σε μουσείο!*

Αν και η συμβολή του σε αυτό το είδος της μουσικής είναι τεράστια, μιας και η χρήση της τεχνολογίας και των θετικών επιστημών ήταν σημαντική , ο Ξενάκης έχει συνδεθεί με την *στοχαστική μουσική*, ένα είδος που δημιούργησε ο ίδιος και ακολούθησαν πολλοί στη συνέχεια. Κι όπως αναφέραμε και στην αρχή, τίποτα δεν ήταν περισσότερο από μουσικό στοχαστή κι ίσως να μην έπραττε τίποτα από όλα αυτά, αν δεν έθετε προβληματισμούς και ερωτήματα γύρω από το αντικείμενο που ονομάζουμε μουσική. Γι' αυτό , θα δούμε στη συνέχεια, τι πραγματικά ήταν αυτό που οδήγησε το συνθέτη στη δημιουργία αυτού που ονόμασε στοχαστική μουσική.

### **3.3 Η στοχαστική μουσική του Ιάννη Ξενάκη**

Τι θα μπορούσε άραγε να περιγράψει κανείς ως *στοχαστική μουσική* και τι θα μπορούσε να εμπερικλείει μέσα της αυτή η μουσική; Για κάποιους παραπέμπει στη φιλοσοφία και την ώριμη σκέψη, για κάποιους άλλους τη δημιουργία μέσα από τη σκέψη, για τον δημιουργό της δεν είναι τίποτα περισσότερο από την αρχιτεκτονική και τα μαθηματικά, ή μάλλον είναι όλα. Οποιοδήποτε κενό εμφανίζεται στη μουσική της εποχής εκείνης, ο Ξενάκης το μετατρέπει σε αριθμούς και πιθανότητες. Και κάπως έτσι δημιουργεί τον δικό του χώρο στον ήχο , με απότερο σκοπό να χωρέσει κάπου.

Τη περίοδο που ο Ξενάκης δημιουργεί το δικό του ρεύμα , στην Ευρώπη που έχει περάσει δύο Παγκοσμίους πολέμους, κυριαρχεί ο δωδεκαφθογγισμός<sup>99</sup> και ο σειραϊσμός<sup>100</sup>. Ωστόσο και τα δύο ρεύματα αποτυγχάνουν να γίνουν η νέα κοινή γλώσσα , που οι καλλιτεχνικοί κύκλοι ζητούσαν. Ο

99 Ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια του δωδεκαφθογγισμού , ήταν ο Άρνολντ Σένμπερκ. Η μέθοδος αυτή , είναι βασική για το ρεύμα της ατονικότητας και χρησιμοποιεί μια επιλεγμένη δωδεκάφθογγο διαδοχή , οπου ονομάζεται *σειρά*. . Στόχος του δωδεκαφθογγισμού, είναι να μην υπάρξουν ιεραρχικοί φθόγοι ( π.χ τονική, δεσπόζουσα κτλ), όπως στη τονική μουσική, αλλά όλοι να ακούγονται εξίσου το ίδιο.

Βλ. Reti, Rudolph , *Tonality, Atonality, Pantonality: A Study of Some Trends in Twentieth Century Music*, Connecticut: Greenwood Press, 1978

100 Είναι η ευρύτερη ενότητα που περικλείει των δωδεκαφθογγισμό . Η μοναδική διαφορά που έχουν μεταξύ τους έγκειται, στην αρχική σειρά, όπου στο σειραϊσμό μπορεί να μην αποτελείται από δώδεκα φθόγγους, αλλά από λιγότερους. Παράλληλα καθορίζει εξ' αρχής κι άλλες παραμέτρους, όπως τη διάρκεια ή το χρώμα.

Βλ. « serialism /σειραϊσμός », από τον ιστότοπο: *Translatm.gr* ( <https://www.translatum.gr/forum/index.php?topic=393015.0> ) , ημερομηνία προσπέλασης: 5-2-2019

εκάστοτε δημιουργός ψάχνει τρόπους να δημιουργήσει μια μοναδική γλώσσα, ενώ παράλληλα η επιστήμη και η τεχνολογία της εποχής έχουν ενταχθεί τόσο πολύ στη μουσική σύνθεση και πρακτική, που κάθε έργο του συνθέτη, πρέπει να είναι διαφορετικό ως προς τον τρόπο, τις τεχνικές και τα μέσα.

Ο Ξενάκης, διέθετε όλα τα μέσα για να δημιουργήσει εκ θεμελίων αυτό που η εποχή ήθελε, αλλά πρώτα έπρεπε να αποδείξει πως ο σειραϊσμός και ο δωδεκαφθογγισμός είχε κορεστεί. Γι' αυτό άσκησε και έντονη κριτική στους δημιουργούς τους, με αποτέλεσμα να τον εκτοπίσουν για πολύ καιρό από την κοινότητα της σύγχρονης μουσικής. Αυτή η αποξένωση φαίνεται πως τον ολοκλήρωσε και τον οδήγησε στην ολοκλήρωση της μουσικής του, εισάγοντας για πρώτη φορά τα μαθηματικά στο έργο του.

Αν και η πλειοψηφία των έργων του μοιάζει να κλίνει προς την ατονικότητα και τον σειραϊσμό, ο Ξενάκης δε τα χρησιμοποίησε ποτέ. Ότι ακούμε στα έργα του είναι σύνολα από ηχητικά συμβάντα και μάζες όπου αποτελούνται από αμέτρητους ήχους. Το πως διανέμονται αυτοί οι ήχοι, είναι τυχαίο. Παρ' όλα αυτά ο Ξενάκης δε τα αφήνει όλα στη τύχη τους. Η συνολική δημιουργία έχει κατευθυντήριες γραμμές και κανόνες. Ο ίδιος έχει τη δυνατότητα να ρυθμίσει τη « συμπεριφορά » των ηχητικών μαζών, αλλάζοντας την πυκνότητα των ήχων καθώς και τον ρυθμό αλλαγής της μάζας. Φανταστείτε σαν να οργανώνεται έναν αγώνα. Το αποτέλεσμα και τις κινήσεις των παικτών δε τις ξέρεις, αλλά ξέρεις το σύστημα και τους κανόνες που υπάρχουν.

Θα μπορούσαμε να πούμε πως στο σύνολο τους τα έργα του Ξενάκη, θυμίζουν μια εξελεγμένη γραμμική πολυφωνία.

Η νέα μουσική ή μάλλον η νέα γλώσσα που προσέφερε ο Ξενάκης, ήταν μια γλώσσα υπερσυνόλων και το πρώτο έργο που την χρησιμοποιεί, είναι το *Μεταστάσεις* γραμμένο για 61 όργανα. Έχει διάρκεια οχτώ λεπτών και πρωτοπαρουσιάστηκε το 1955 στο φεστιβάλ Donaueschingen<sup>101</sup>. Για πρώτη φορά χρησιμοποίησε μαζικά *glissandi*<sup>102</sup> στα έγχορδα κυρίως, δίνοντας έτσι την αίσθηση ότι ο ήχος μαζικά κινείται και δε παραμένει σταθερός σε μια τονικότητα, γι' αυτό εξάλλου και ο ίδιος ο ακροατής αισθάνεται πως η μελωδία χάνεται μέσα σε αυτή τη κινητικότητα των ηχητικών μαζών. Παρακάτω θα δούμε την γραφική παρτιτούρα του ίδιου του συνθέτη, από τα πρώτα μέτρα του έργου, όπου διακρίνονται τα *glissandi* των εγχόρδων ενώ θα ακούσουμε και την αρχή του έργου που τα περιλαμβάνει.

---

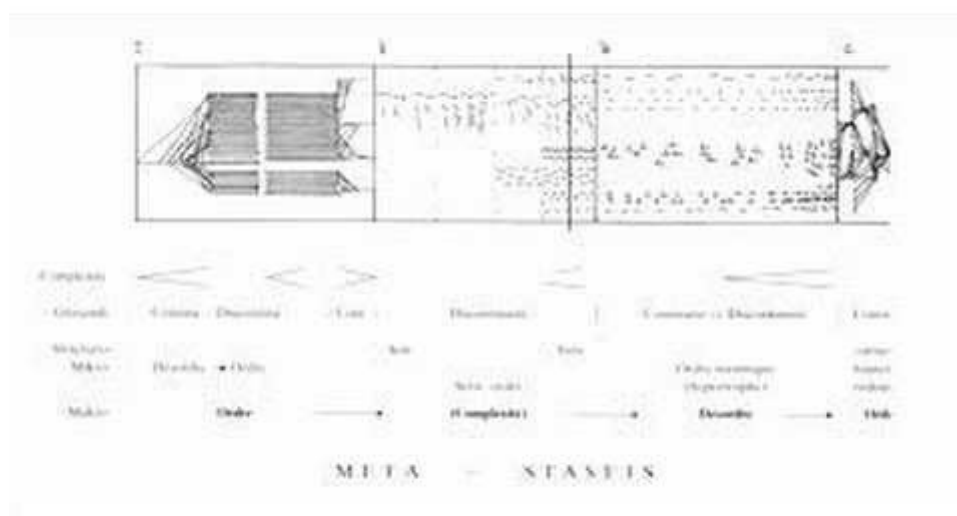
101 Είναι ένα φεστιβάλ για τη σύγχρονη μουσική που λαμβάνει χώρα κάθε χρόνο στην πόλη Donaueschingen της Γερμανίας και ξεκίνησε το 1921. Θεωρείται από τα πιο διάσημα φεστιβάλ της νέας μουσικής και έχουν συμμετάσχει σε αυτό κατά καιρούς, μεγάλα ονόματα της σύγχρονης μουσικής όπως ο Άλμπαν Μπέργκ, Άρνολντ Σένμπεργκ, Ιγκόρ Στραβίνσκι, Πιερ Μπουλέζ και πολλοί άλλοι, καθώς και ο Ιάννης Ξενάκης.

Βλ. Hausler Josef, *Spiegel der Neuen Musik: Donaueschingen: Chronik - Tendenzen – Werkbesprechungen*, Kassel: Bärenreiter Verlag, 1996

102 Η λέξη προέρχεται από το ιταλικό *glissando* και η ρίζα της έγκειται στο γαλλικό *glisser* που σημαίνει γλιστρώ. Είναι μια ακολουθία φθόγγων που ολισθαίνουν, δηλαδή γλιστράνε προς τα πάνω ή προς τα κάτω, είτε διατονικά, είτε χρωματικά.

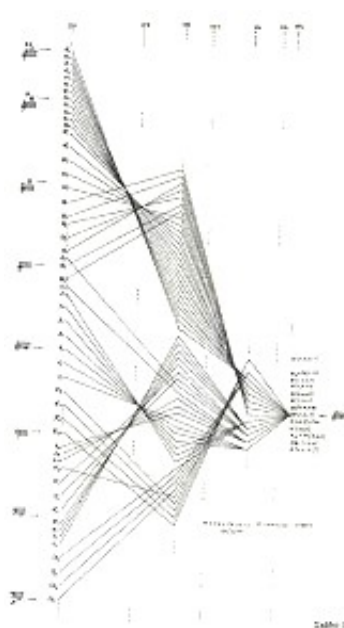
Βλ. Michels Ulrich, *Ατλας της μουσικής*, μτφ Ι.Ε.Μ.Α, Αθήνα: Φύλιπος Νάκας, 1994, Τόμος Ι, σ. 75





Εικόνα 5: Γραφική παρτιτούρα από τα πρώτα μέτρα του έργου "Μεταστάσεις"

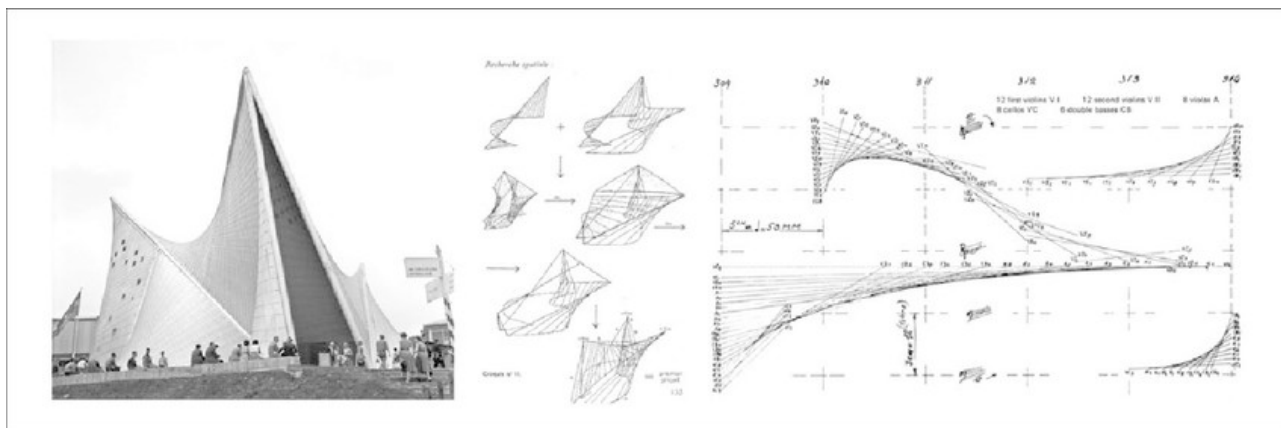
Φυσικά το ρίσκο του να γράψει κάτι που κανείς δεν είχε τολμήσει αλλά ούτε και ο ίδιος είχε με σιγουριά ακούσει εσωτερικά, ήταν σκανδαλώδες . Ο μόνος τρόπος όπου ο Ξενάκης ίσως να φαντάσθηκε το ηχητικό αποτέλεσμα, ήταν πάνω στο μιλιμετρέ χαρτί σχεδίασης καις τη συνέχεια το μετέφερε σε πεντάγραμμο. Εδώ από την άλλη έκανε το εξής εκπληκτικό. Ο ίδιος προχώρησε σε μια εξατομίκευση των μουσικών της ορχήστρας, γράφοντας για τα 46 έγχορδα διαφορετικές γραμμές , εξού και ο μεγάλος όγκος του χειρόγραφου έργου.



*Εικόνα 6: Το μέρος των glissandi*



Αργότερα, τη τεχνική αυτή των glissandi, τη χρησιμοποίησαν κι άλλοι συνθέτες όπως ο György Ligeti, και ο Krzysztof Penderecki. Θα ήθελα να αναφέρω, πως για την κατασκευή του περιπτέρου Phillips στις Βρυξέλλες το 1958<sup>103</sup>, χρησιμοποίησε την ίδια μαθηματική θεωρία με αυτή του έργου *Μεταστάσεις*.



Εικόνα 7: Τα σχέδια για το περίπτερο της Phillips καθώς και του έργου "*Μεταστάσεις*"

Γενικά το έργο των του *Μεταστάσεις* μπορεί να αναλυθεί σε ένα ολόκληρο κεφάλαιο μόνο του, καθώς αποτελεί το πρώτο μαθηματικό μουσικό δημιούργημα, όχι μόνο του συνθέτη αλλά και μιας ολόκληρης εποχής. Το ίδιο, εκλαμβάνεται ως αφετηρία για τα επόμενα έργα του Ξενάκη αλλά και των συνθετών της γενιάς του.

Επόμενο στοχαστικό του έργο, τα *Πυθόπρακτα* το 1955-1956 για ορχήστρα εγχόρδων, δύο τρομπόνια και κρουστά. Το όνομα του το πήρε από το γεγονός πως εισάγει τους λόγους των πιθανοτήτων (πιθανοτικές πράξεις).

Στο έργο εδώ ο Ξενάκης χρησιμοποιεί πάλι τις ίδιες καινοτομίες με το *Μεταστάσεις*, τα glissandi και την εξατομικευμένη μελωδία, μόνο που εδώ τα απογειώνει. Κι αυτό γιατί ο ίδιος φαντάζεται έξι παράλληλους κόσμους ηχοχρωμάτων που αντιτίθενται το ένα στο άλλο. Οπότε η ζωντάνια και η κίνηση του έργου είναι ολοκάθαρη. Παράλληλα είναι υπολογισμένα με απόλυτη ακρίβεια, περισσότερα από χίλια pizzicati<sup>104</sup> και glissandi τα οποία κατανέμει πάλι με σχέδιο σε μιλιμετρέ χαρτί. Η χρήση των πιθανοτήτων από τον ίδιο προήλθε αρχικά από την έμφυτη πυθαγόρεια μαθηματική του φύση, αλλά και από τη μελέτη της συμπεριφοράς των μορίων, όπως αυτή αναφέρεται στη *Κινητική θεωρία των αερίων*.

Το έργο δεν είναι καινοτόμο μόνο για τις θεωρίες του και τις τεχνικές του, αλλά και για το συνολικό του αποτέλεσμα. Αν συγκεντρωθούμε κατά την ακρόαση του, θα παρατηρήσουμε πως όλο το έργο μιμείται έναν ήχο, έναν θόρυβο, που φτάνει στο τέλος να καταλήξει σε ένα καθαρό άκουσμα. Ουσιαστικά λοιπόν γράφει δύο έργα σε ένα.

Παρ'όλα αυτά, το έργο αποδοκιμάστηκε από την πρεμιέρα του, στο Μόναχο το 1957, με αποτέλεσμα ο μαέστρος Σέρχεν όπου διήυθυνε το έργο να παραλείψει το τελευταίο μέρος του

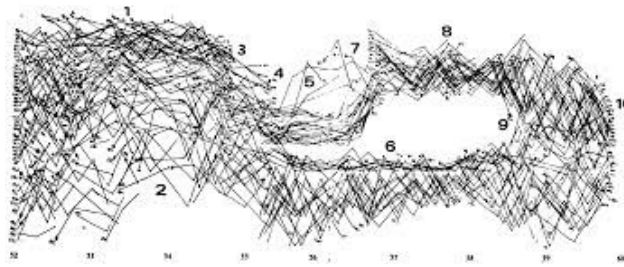
<sup>103</sup>Το περίπτερο Phillips Pavilion σχεδιάστηκε από τον αρχιτέκτονα Le Corbusier, σε συνδυασμό με τη βοήθεια του φίλου του και συνεργάτη Ιάννη Ξενάκη, το 1958, για την Παγκόσμια έκθεση στις Βρυξέλλες. Οι επισκέπτες εισέρχονταν σε ένα σκοτεινό χώρο σε μια διαδρομή οκτώ μόλις λεπτών, όπου αρχικά άκουγαν μια εισαγωγική σύνθεση του Ξενάκη και στη συνέχεια διάφορους ήχους. Το εσωτερικό αναφέρεται πως έτεινε να μοιάζει με το στομάχι μιας αγελάδας, λόγω του πολυδιάστατου χώρου.

Βλ. Clarke, Joseph L., «Iannis Xenakis and the Philips Pavilion», από τον ιστότοπο *Academia. Edu* ([https://www.academia.edu/5090254/Iannis\\_Xenakis\\_and\\_the\\_Philips\\_Pavilion](https://www.academia.edu/5090254/Iannis_Xenakis_and_the_Philips_Pavilion)), ημερομηνία προσπέλασης: 9-11-2018

<sup>104</sup>Ο όρος *pizzicato* σημαίνει τσιμπητά και είναι Ιταλικής προέλευσης. Είναι οδηγία εκτέλεσης για τα έγχορδα, όπου ο εκτελεστής τσιμπάει τη χορδή.

Βλ. Michels Ulrich, *Ατλας της μουσικής*, μτφ Ι.Ε.Μ.Α, Αθήνα: Φύλλιπος Νάκας, 1994, Τόμος Ι, σ. 77

έργου , όπου εμπεριέχει μεγάλης διάρκειας παύσεις.



Εικόνα 8: Τα pizzicati-glissandi όπως σχεδιάστηκαν από τον Ξενάκη.

Όμως θα ήταν επιπόλαιο από πλευράς μου μιας και αναλύουμε τη σταχαστική μουσική του Ξενάκη, να μην αναφερθώ στο έργο με τους αμιγώς στοχαστικούς νόμους το *Αχορρίψεις* .

Το όνομα του προέρχεται από τις λέξεις ἄχος + ῥίψις που σημαίνει πίδακες ήχου. Συντέθηκε το 1956-1957 και πρωτοπαρουσιάστηκε στο Μπουένος Άιρες από τον πολύ φίλο του Ξενάκη και μαέστρο Χέρμαν Σέρχεν<sup>105</sup>. Η οργάνωση του και σύνθεση του είναι πολυεπίπεδη εξαιτίας των στοχαστικών νόμων που εφάρμοσε, εξάλλου είναι και ο λόγος που έχει παρουσιαστεί ελάχιστες φορές .

Κατά κύριο λόγο στο έργο αυτό χρησιμοποιεί τη διακριτή κατανομή *Poisson* ή αλλιώς το νόμο των μικρών αριθμών ή τη κατανομή των σπάνιων ενδεχομένων ( *distribution of rare events* )όπως θα τη συναντήσουμε σε πολλές βιβλιογραφίες. Πήρε το όνομά της από τον Γάλλο μαθηματικό Smeon Dennis Poisson και ανήκει στις θεωρίες της στατιστικής και των πιθανοτήτων . Χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση διωνυμικών καταστάσεων όπου μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε τον αριθμό εμφανίσεων σπάνιων ενδεχομένων σε μεγάλους πληθυσμούς, όπως για παράδειγμα ,αν έχουμε μια επειχήρηση με 500 υπαλλήλους , πόσοι από αυτούς θα μπορούσαν να έχουν γεννηθεί την ημέρα της Πρωτοχρονιάς.

Πως όμως τη χρησιμοποιεί ο ίδιος ο Ξενάκης;

Το έργο έχει διάρκεια 7 λεπτών. Πριν προχωρήσει στη μουσική σύνθεση ,ο Ξενάκης δημιούργησε ένα πίνακα 28 στηλών , όπου βρίσκονται οι 28 μονάδες χρόνου στις οποίες διαιρείται ολόκληρο το έργο, δηλαδή σε κάθε στήλη έχουμε 15 δευτερόλεπτα , που το κάθε ένα αντιστοιχεί σε 6,5 μέτρα, αν ο ρυθμός μας είναι σε 52 χτύπους μισών. Όλο το έργο περιέχει 182 μέτρα , αν κάνουμε λοιπόν τη διαίρεση 28/6,5 παίρνουμε το αποτέλεσμα 4,30 δευτερόλεπτα. Ωστόσο αν ανάλυσουμε το έργο παρατηρούμε πως ο συνθέτης δεν εφάρμοσε απόλυτα το αποτέλεσμα της διαίρεσης, πιθανόν προς χάρη της καλύτερης μουσικής ροής. Στα 28 κουτιά που χωρίζει το έργο διανέμει τα πιθανά μουσικά γεγονότα αρχικά με βάση τη πυκνότητα τους ,σε 0, 1, 2,3, 4 και 5. Με το  $\lambda$  ( που αντιστοιχεί στο κελί ) να είναι 0.6 δευτερόλεπτα υπολογίζει ποιά είναι η πιθανότητα να συμβεί ένα μονό διπλό ή πενταπλό γεγονός με βάση την εξίσωση του Poisson :

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

<sup>105</sup>Γεννημένος στο Βερολίνο το 1891 ο Χέρμαν Σέρχεν ήταν βιολιστής και διευθυντής ορχήστρας. Ασχολήθηκε κυρίως με τη σύγχρονη μουσική, μιας και βρέθηκε στη καρδιά της εξέλιξης της, αν και οι περισσότεροι τον γνωρίζουν από την ενασχόλησή του και τις ηχογραφήσεις του με τα έργα του Μπαχ, ιδιαίτερα του έργου *Η τέχνη της φούγκας* . Παράλληλα βοήθησε πολλούς νέους καλλιτέχνες στο ξεκίνημα της καριέρας τους και αναμεσά τους και ο Ιάnnης Ξενάκης.

Βλ. « Hermann Scherchen », από τον ιστότοπο Encuclopaedia Britannica ( <https://www.britannica.com/biography/Hermann-Scherchen> ), ημερομηνία προσπέλασης: 12-11-2018

Οι 7 κάθετες γραμμές αναπαριστούν τα διαφορετικά ηχοχρώματα. Κάθε γραμμή περιλαμβάνει ένα σύνολο οργάνων ή ηχοχρωμάτων για παράδειγμα

1. Φλάουτο (Πίκολο σε Μι b, Κλαρινέτο, Μπάσο Κλαρινέτο)
2. Όμποε (Όμποε, Φαγκότο, Κόντραφαγκότο)
3. Έγχορδα glissando (Βιολί, Βιολοντσέλο, Κοντραμπάσο)
4. Κρουστά (Ξυλόφωνο, WoodBlock, Γκρανκάσα)
5. Pizzicato (Βιολί, Βιολοντσέλο, Κοντραμπάσο)
6. Χάλκινα (2 Τρομπέτες, Τρομπόνι)
7. Έγχορδα arco (Βιολί, Τσέλλο, Κοντραμπάσο)

Με τις κατάλληλες μαθηματικές πράξεις θα δούμε πως τουλάχιστον τα μισά κελιά δεν περιλαμβάνουν κανένα ηχητικό γεγονός. Όσο για το πως ο ίδιος υπολόγισε τη πυκνότητα του κάθε κελιού, θεώρησε πως αν ένα μουσικό σύνολο παίζει κατά μέσο όρο 10 ήχους ανά δευτερόλεπτο, τότε ένα μονό γεγονός μπορεί να ισούται με τρεις παραμέτρους,  $\delta = 2.2 / \text{δευτερόλεπτο}$ , ή  $\delta = 5$  ήχους / μέτρο 26 μιλιμέτρ ή  $\delta = 4432.5 / \text{ήχους} / \text{μονάδα χρόνου}$ . έτσι υπολογίζει και τα διπλά, τριπλά, τατραπλά και πενταπλά γεγονότα.

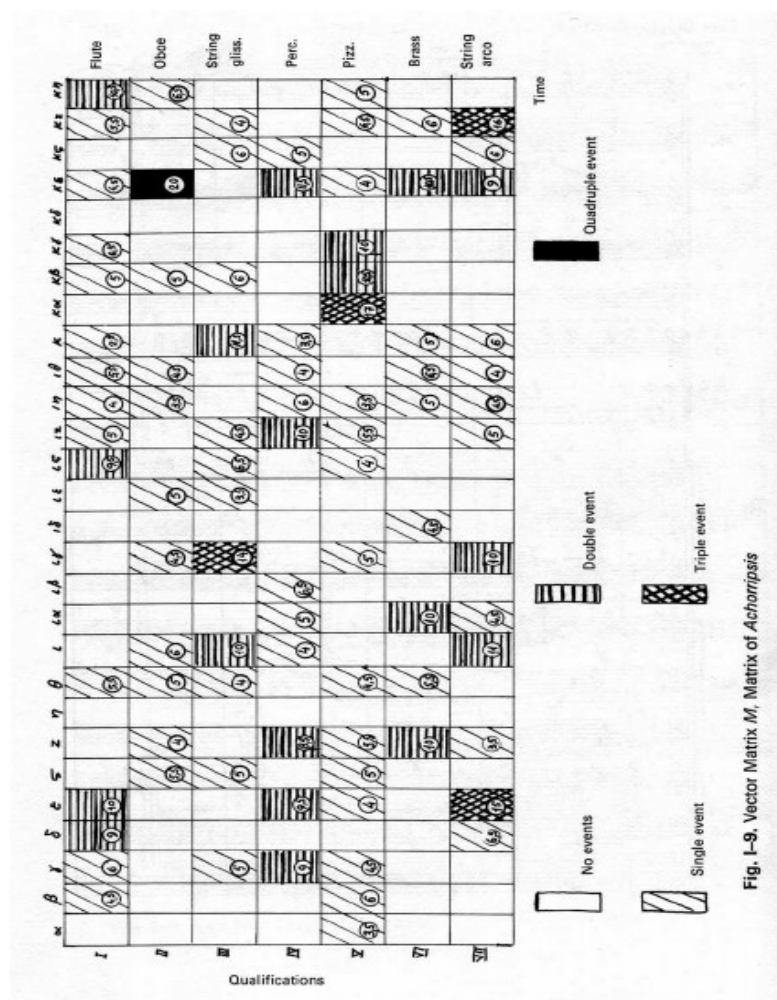


Fig. 1-9. Vector Matrix M, Matrix of Acharopsis

Εικόνα 9: Πίνακας του έργου " Αχορρίψεις ", όπως σχεδιάστηκε από τον Ιάnnη Ξενάκη.

Για έναν μουσικό και για οποιονδήποτε μουσικό ερευνητή που δεν ασχολείται με την επιστήμη των μαθηματικών είναι σχεδόν ασύλληπτο να συσχετίσει και να κατανοήσει αυτούς τους υπολογισμούς σύμφωνα με τις νότες του μουσικού έργου. Άλλωστε μπορεί και ο ίδιος Ξενάκης να μην είχε προβεί ποτέ σε όλα αυτά αν δε τον βοηθούσε η αρχική του ιδιότητα, αυτή του αρχιτέκτονα.

Από αυτή τη περίοδο και μετά όλα του τα έργα περιλαμβάνουν μαθηματικές και φυσικές θεωρίες που άλλοτε αποδεικνύονται μέσα στα έργα του και άλλοτε όχι. Από εδώ και πέρα, όλο το ηχητικό υλικό του διαμορφώνεται μέσω της στατιστικής οδηγούμενο προς μία κατεύθυνση, με συγκεκριμένο στόχο. Η στοχαστική του μουσική λοιπόν, περά από την διττή σημασία του όρου, που παραπέμπει και στη φιλοσοφία και τα μαθηματικά, είχε εμπράκτως στόχο σε κάθε της έργο. Για αυτό το λόγο άλλωστε έχει δεχτεί έντονη κριτική, από πολλούς αναλυτές, εξαιτίας των περιορισμών που θέτει στο συνθέτη. Και για αυτό το λόγο άλλωστε μετά το τέλος του έργου *Αχορρίψεις*, ο Ξενάκης δημοσιεύει ένα κείμενο, στο οποίο εξηγεί κατά πόσο τελικά το έργο είναι τυχαίο ύστερα από όλη αυτή τη μαθηματική ανάλυση, αλλά και πως θα μπορούσε ο αναλυτής και ακροατής να το δει μουσικά<sup>106</sup>.

Φαίνεται πως στον συνθέτη δεν άρεσε να αφήνει τίποτα στη τύχη, ή τίποτα που να δημιουργεί αμφιβολίες. Ξεχωρίζει στη μουσική ιστορία του 20ου αιώνα, όχι για τη καινοτομία του, όσο για το ταλέντο του να βλέπει ένα βήμα μπροστά και να μη βάζει όρια στη μουσική σύνθεση και επιστήμη, μόνο και μόνο επειδή είναι τέχνη. Για τον Ξενάκη είναι φανερό, πως η τέχνη πρέπει να εννοείται και να αποτυπώνεται με όλη τη σημασία του όρου της και τέχνη για τον ίδιο φαίνεται πως είναι η ανθρώπινη νόηση πρακτική χωρίς πλάτυ και μήκη, χωρίς, τονικότητες και οπλισμούς, χωρίς πεντάγραμμο ή μιλιμετρέ χαρτιά, αλλά με πάθος, ταλέντο και αγάπη για αυτό που θέλει να κάνει.



*Εικόνα 10: Ο Ιάννης Ξενάκης, στο στούντιό του στο Παρίσι, 1987*

---

106 Xenakis, I., *Formalized Music: Thought and Mathematics in Music*, Hillsdale, N: Pendragon Press, 1992, p. 37

## *Επίλογος*

Φτάνοντας στο τέλος της εργασίας, καταλαβαίνω πως όλα αυτά που προανέφερα, όλες αυτές οι σπουδαίες θεωρίες και ανακαλύψεις ,δεν έγιναν σπουδαία μόνο επειδή κάποιος τα διατύπωσε και τα προώθησε στην ανθρωπότητα, αλλά γιατί ήδη υπήρχαν, γιατί υπήρχαν από την αρχή της δημιουργίας. Κι είναι πραγματικά εντυπωσιακό , το αποτέλεσμα που προσέφεραν τα τεχνολογικά μέσα της εκάστοτε εποχής στο τομέα μας . Το πιο εντυπωσιακό όμως είναι, πως παρ'όλο που η κάθε εποχή υστερούσε σε θεωρίες, μέσα και τεχνικές από την επόμενη, η μία επιβεβαίωνε την άλλη. Ο Πυθαγόρας μίλησε για τα "μουσικά" άστρα και τέσσερις χιλιάδες χρόνια μετά, τεχνολογία τον επιβεβαίωσε. Αυτόν, που διέθετε μόνο λογική και μαθηματική ευφυΐα. Τα μαθηματικά του Ευκλείδη, του Βο , η φυσική του Νεύτωνα και πολλές άλλες θεωρίες, που μοιάζουν αδύνατο να συνδέονται με τη μουσική, βρέθηκαν ενωμένες και άρτια ενσωματωμένες , σε μερικά από τα πιο διάσημα μουσικά έργα του 20ου αιώνα.

Ειδικά τα έργα του τελευταίου αιώνα, ακουστικά μοιάζουν να σκορπίζονται εκτός φόρμας και τονικού κέντρου κι όμως είναι δομημένα σε άψογα μαθηματικά.

Σε αυτή την εργασία, πέρα από τις γνώσεις που απέκτησα , αλλά και τον άπειρο σεβασμό και θαυμασμό μου για τον τομέα των φυσικών επιστημών, αλλά ιδιαίτερα των μαθηματικών,με έκανε να συμπεράνω κάτι συγκεκριμένο.

Πολλές φορές, τις περισσότερες θα έλεγα, εμείς οι νέοι μουσικοί μελετητές, αλλά και οι προγενέστεροι , λανθάνουμε ως προς την αντιμετώπιση της ίδιας μας της τέχνης. Εστιάζουμε πολύ περισσότερο στους κανόνες της , τις φόρμες και την περιπλοκότητά της, με αποτέλεσμα να χάνουμε την ουσία. Και η ουσία της φίλτατοι, κρύβεται σε σημεία που δεν έχουν αρμονικές λύσεις ή μαθηματικές, αλλά στους " γρίφους" που σίγουρα ακούμε ,αλλά δε μπορούμε να τους μετρήσουμε ή να τους απλώσουμε πάνω σε πέντε γραμμές.

Στο μυστήριο , κρύβεται η ομορφιά της!

## **BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### **ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ**

- The editors of Encyclopaedia Britannica, *Pythagoras*, από τον ιστότοπο Encyclopaedia Britannica ( <https://www.britannica.com/biography/Pythagoras> ), ημερομηνία προσπέλασης: 23-4-2018
- Arnold Hermann, *Σκέψου σαν θεός: Πυθαγόρας και Παρμενίδης*, μτφ Πηνελόπη Τριάδα, Αθήνα: Ενάλιος, 2008, σ.65
- Barbera , A. « The consonant eleventh and the expansion of the musical tetraktys », *Journal of Music Theory* ( 1984), Vol. 28, pp. 191-224
- Barker, A. *The science of Harmonics in classical Greece*, Cambridge: Cambridge University Press, 2007, pp. 3-30
- Bernard, Pierre; *The UPIC as a Performance Instrument*, *Contemporary Music Review* ( 2009), Vol. 6 , pp. 47 – 57.
- Bussy, Pascal, *John Coltrane* ( Paris: E.JL,1999)
- Caroline Usher , *Pythagoras* , από τον ιστότοπο Academia ( <https://www.academia.edu/12353896/Pythagoras> ), ημερομηνία προσπέλασης: 23-4-2018
- Caswell, Estelle, « The most feared song in Jazz,explained », [οπτικοακουστικό υλικό/Video], από τον ιστότοπο Vox ( <https://www.youtube.com/watch?v=62tlvfP9A2w&feature=youtu.be> ) ημερομηνία προσπέλασης: 14/1/2019
- Childs,E. , *Achorripsis: A Sonification of Probability Distrubtions*, Kyoto: Proceedings of the 2002 International Conference on Auditory Display, 2002
- Childs,E., « The Matrix of Achorripsis » ( *εικόνα*), από τον ιστότοπο *Research Gate* ( [https://www.researchgate.net/figure/The-Matrix-of-Achorripsis-1\\_fig1\\_228783866](https://www.researchgate.net/figure/The-Matrix-of-Achorripsis-1_fig1_228783866) ), ημερομηνία προσπέλασης: 14-11-2018
- Creese, D. , *The monochord in ancient Greek harmonic science*, Cambridge: Cambridge University Press, 2010, pp. 131- 177
- Crocker, R. , « Pethagorean mathematics and music », *Journal of Aesthetics and Art Criticism* ( 1964), Vol. 22, pp. 189-198 & 325-335
- Clarke, K., “A Decade of Cellular Urban Modeling with SLEUTH:Unresolved Issues and Problems”, Lincoln Institute of Land Policy, Cambridge 2008
- Diaz-Jerez,G. , *Algorithmic Music:Using mathematical models in music composition*, NY: Manhattan School of Music, 2000



- Gino, Loria, *Ιστορία των μαθηματικών*, μτφ. Μιχαήλ Α. Κωβαίος, (Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, 1990), σ. 183-190
- Godwin, J., *The harmony of the spheres*, Inner Traditions, 1992.
- Goodheart, Matthew, « The "Giant Steps" fragment », *Perspectives of New Music* ( 2001), Vol.39, pp. 63-95
- Heath, Thomas, *A history of Greek mathematics*, ( New York: Dover Publications, 1981)
- Henderson , I. « Ancient Greek music», Wellesz, E. *Ancient and oriental music*, London: Oxford University Press, 1957, pp. 336-403
- Huffman, Carl A., Archytas of Tarentum: Pythagorean, philosopher and mathematician king, Cambridge: Cambridge University Press, 2005
- 
- Ivon Thomas (translator), *Greek Mathematics vol. I, from Thales to Euclid* , London : Harvard University Press, 1967
- Jamie, J. , *The music of the spheres*, London: Abacus, 1995, pp. 20-40
- Karpati, A. « Greek Music Theory in the IV Century B.C. », *International Journal of Musicology* ( 1994), Vol. 3, pp. 57-88
- Kraut, Richard, *The cambridge companion to Plato*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- Laha, R. G. and Rohatgi, V. K.. *Probability Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1979
- Leonard Robert, *Von Neumann, Morgenstern, and the Creation of Game Theory: From Chess to Social Science, 1900-1960* , Cambridge: Cambridge Univeristy Press, 2012
- Levin, F. R. , *The harmonics of Nicomachus and the Pethagorean tradition* , American Park, PA, American Philological Association, 1975
- Lippman, E. A. , *Musical Thought n Ancient Greece*, New York: Columbia University Press, 1964, pp. 87- 110
- Marie-Hélène Serra , « Stochastic Composition and Stochastic Timbre: GENDY3 by Iannis Xenakis », *Perspectives of New Music* ( 1993), Vol.31, pp. 236-257
- Matossian Nouritza, *Xenakis*, London: Kahn & Averill, 1986
- Matossian Nouritza, *Iannis Xenakis*, ( Paris: Fayard, 1981)
- Mattei J. F. , *Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι* , μτφ Κωνσταντίνου Κ. , Αθήνα: Μ. Καρδαμίτσα,

1995

- Neubecker, A. J. , *Η μουσική στην Αρχαία Ελλάδα*, μτφ. Σιμωντά – Φιδετζή Μ. , Αθήνα: Οδυσσέας Ε.Π..Ε, 1986
- Nolan, C. , « Music theory and mathematics, » Christensen, T. , *Western music theory*, Cambridge: Cambridge University Press 2002
- Olsen Scott, *Η χρυσή τομή: το μεγαλύτερο μυστικό της φύσης*, μτφ Διαμιανίδου Δέσποινα, Αθήνα: Αλεξάνδρεια, 2012
- Reinach, T. , *Η Ελληνική μουσική*, μτφ. Καραστάθη, Α. , Αθήνα: Ινστιτούτο του Βιβλίου – Α. Καρδαμίτσα, 1999
- Riffenburgh, R. H, *Statistics in medicine*, San Diego: Academic Press , 3<sup>rd</sup> edition, 2012
- Santa, Matthew, « Nonatonic progressions in the music of John Coltrane », *Annual Review of Jazz Studies* ( 2003), Vol. 13, pp. 13-25
- Sir Thomas L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, New York: Dover, 1931
- Squibbs Ron, « Images of Sound in Xenakis's Mycenae-Alpha », από τον ιστότοπο *Academia. Edu* ( [https://www.academia.edu/3529884/Images\\_of\\_Sound\\_in\\_Xenakiss\\_Mycenae-Alpha](https://www.academia.edu/3529884/Images_of_Sound_in_Xenakiss_Mycenae-Alpha) ), ημερομηνία προσπέλασης: 31-10-2018
- Stamou, Lelouda, « Plato and Aristotle on music and music education: Lessons from ancient Greece », *International journal of music education* ( 2002), Vol.39, p. 3-16
- Von Neuman, John & Morgenstern Oskar, *Theory of Games and Economic Behavior*, New Jersey: Princeton University Press, 1944
- Walfram Stephen , *A new kind of science*, Walfram Media.Inc, 2002
- Warren, D. A., *Music and Musicians in Ancient Greece* , Ithaka, Ithaka [N.Y. ]: Cornell University Press, 1994, pp. 248

#### ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αναπολιτάνος Δ, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Δ' Έκδοση, Αθήνα: Νεφέλη, 2009
- Αντωνόπουλος, Α. , *Από την τονική στη σύγχρονη μουσική θεωρία*, Αθήνα: τυπωθήτω, 1999
- Αριστόξενος ο Ταραντίνος, *Άπαντα : αρμονικά στοιχεία, ρυθμικά στοιχεία, αποσπάσματα*, μτφ Φιλολογική ομάδα Κάκτου, (Αθήνα;Κάκτος, 2005)
- 
- Bormann, Karl, *Πλάτων*, μτφ. Καλογεράκος Γ. Ιωάννης, Αθήνα: Α. Καρδαμίτσα, 2006
- Γαϊτάνη, Αντωνία, « Σχέση μαθηματικών και μουσικής μέσω αρχαίων ελληνικών κειμένων » [ PDF], από τον ιστότοπο *Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών* ( [http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl\\_gaitani.antonio.pdf](http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_gaitani.antonio.pdf)), ημερομηνία προσπέλασης: 13-12-2018

- Γεωργίου, Μ. Π. , *Αναζητώντας τον συμπαντικό ήχο*, Λευκωσία: Εν Τύποις 2005
- Γκουντουβάς Χρ. , Σωτήρης, *Γεωμετρικές διαδρομές*, Αθήνα: Ιδιωτική, 2015
- Ζήκα Χριστίνα, « Ποιες θεωρίες διατύπωσε ο Αλβέρτος Αϊνστάιν », από τον ιστότοπο *Το Βήμα* ( 2008) ( <https://www.tovima.gr/2008/11/24/archive/poies-thewries-diatypwse-o-albertos-ainstain/> ), ημερομηνία προσπέλασης: 7-10-2018
- Θεωδοράκοπουλος Ιωάννης, *Εισαγωγή στον Πλάτωνα*, Πανεπιστημιακές παραδόσεις , Αθήνα, 1964
- Κοψαχείλης, Στέλιος Ι., *Μουσικοφιλοσοφία : Αριστοξένος ο μουσικός μαθητής του Αριστοτέλη και τα θεωρητικά τη μουσική*, ( Θεσσαλονίκη: Μαϊάνδρος, 1996)
- Μαυροειδής, Μάριος Δ. , *Οι μουσικοί τρόποι στην Ανατολική Μεσόγειο*, ( Αθήνα: Fagotto Books, 1999)
- Μουσουλίδης Φώτης, « Ιάnnης Ξενάκης – Η αναζήτηση για μια παγκόσμια μουσική και το Πυθαγόρειο πρότυπο », από τον ιστότοπο *Academia. Edu* ( [https://www.academia.edu/36126510/%CE%99%CE%91%CE%9D%CE%9D%CE%99%CE%A3\\_%CE%9E%CE%95%CE%9D%CE%91%CE%9A%CE%99%CE%A3\\_%CE%97\\_%CE%91%CE%9D%CE%91%CE%96%CE%97%CE%A4%CE%97%CE%A3%CE%97\\_%CE%93%CE%99%CE%91\\_%CE%9C%CE%99%CE%91\\_%CE%A0%CE%91%CE%93%CE%9A%CE%9F%CE%A3%CE%9C%CE%99%CE%91\\_%CE%9C%CE%9F%CE%A5%CE%A3%CE%99%CE%9A%CE%97\\_%CE%9A%CE%91%CE%99\\_%CE%A4%CE%9F\\_%CE%A0%CE%A5%CE%98%CE%91%CE%93%CE%9F%CE%A1%CE%95%CE%99%CE%9F\\_%CE%A0%CE%A1%CE%9F%CE%A4%CE%A5%CE%A0%CE%9F?auto=download](https://www.academia.edu/36126510/%CE%99%CE%91%CE%9D%CE%9D%CE%99%CE%A3_%CE%9E%CE%95%CE%9D%CE%91%CE%9A%CE%99%CE%A3_%CE%97_%CE%91%CE%9D%CE%91%CE%96%CE%97%CE%A4%CE%97%CE%A3%CE%97_%CE%93%CE%99%CE%91_%CE%9C%CE%99%CE%91_%CE%A0%CE%91%CE%93%CE%9A%CE%9F%CE%A3%CE%9C%CE%99%CE%91_%CE%9C%CE%9F%CE%A5%CE%A3%CE%99%CE%9A%CE%97_%CE%9A%CE%91%CE%99_%CE%A4%CE%9F_%CE%A0%CE%A5%CE%98%CE%91%CE%93%CE%9F%CE%A1%CE%95%CE%99%CE%9F_%CE%A0%CE%A1%CE%9F%CE%A4%CE%A5%CE%A0%CE%9F?auto=download) ) , ημερομηνία προσπέλασης: 19-10-2018
- Μπάλλας Κωστής, *Πυθαγόρας και Πυθαγόρειοι*, Αθήνα : Προσκήνιο, 2001
- Μπόνης Κωνσταντίνος, *Ο Άγιος Αυγουστίνος Επίσκοπος Ιπώνος: Βίος και συγγράμματα*, ( Αθήνα: Γρηγόρης, 1964)
- Ντζιούνη Γ. Ε, Σπυρίδης Χαράλαμπος Χ., « Δημερίδα: Πυθαγόρεια θεώρηση της μουσικής: μαθηματικές και φιλοσοφικές προσεγγίσεις», από τον ιστότοπο *Εθνικών και Καποδιστριακών πανεπιστήμιων Αθηνών* ( <http://users.uoa.gr/~hspyridis/ntziouni.pdf> ), ημερομηνία προσπέλασης: 25-8-2018
- Παπαοικονομου- Κηπουργού, Κ. *Η μουσική στην Αρχαία Ελλάδα*, Αθήνα: Γεωργιάδης, 2007, σ. 43-60
- " Πυθαγόρας ο Σάμιος", Πελεγρίνης Θωδορής, *Λεξικό της φιλοσοφίας*, Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα, 2004, σ. 1144
- Πορφύριος, *Πυθαγόρας βίος* , μτφ Μακρής Κωνσταντίνος, Αθήνα: Κατάρτι, 2001, σ. 72-149
- Πούλος, Παναγιώτης, *Η μουσική στον ισλαμικό κόσμο : Πηγές, θεωρήσεις, πρακτικές*, ( Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών, 2015 )
- Σακελλαρίου, Γ. Θ. , *Πυθαγόρας: ο δάσκαλος των αιώνων*, Αθήνα: Ευσταθίου Δριβοπούλου,

1963, σ. 342

- Σολωμός Μάκης, *Ιάννης Ξενάκης: Το σύμπαν ενός ιδιότυπου δημιουργού*, Αθήνα: Αλεξάνδρεια, 2008
- Σπανδάγος Κ. Ευάγγελος, *Η χρυσή τομή στην Αρχαία Ελλάδα*, Αθήνα: Αίθρα, 2004
- Σωτηρίου Γ. Ν. , (υπό δημοσίευση) "Πυθαγόρειο θεώρημα .Μαρτυρίες και ανακατασκευές", *Μαθηματική επιθεώρηση*, τεύχος 88

### EIKONEΣ

- **Εικόνα 1:** « John Coltrane ‘Giant Steps’ analysis », από τον ιστότοπο: *Raphaeljezukiewicz* ( <https://raphaeljezukiewicz.wordpress.com/2016/04/16/john-coltrane-giant-steps-analysis/> )
- **Εικόνα 2:** « De Coltrane Cirkel & Geometrie », από τον ιστότοπο: *Sax wereld* ( <https://saxwereld.nl/coltrane-toon-cirkel-geometrie/> )
- **Εικόνα 3:** Lauten, Elodie, « Concepts », από τον ιστότοπο: *Elodielauten.net* ( <http://www.elodielauten.net/concept.html> )
- **Εικόνα 4:** « ‘UPIC system’ (Unité Polyagogique Informatique du CEMAMu) Patrick Saint-Jean & Iannis Xenakis, France, 1977.», από τον ιστότοπο: *120 years of electronic music* ( <http://120years.net/upic-system-iannis-xenakis-france-1977/> )
- **Εικόνα 5:** « ‘UPIC system’ (Unité Polyagogique Informatique du CEMAMu) Patrick Saint-Jean & Iannis Xenakis, France, 1977.», από τον ιστότοπο: *120 years of electronic music* ( <http://120years.net/upic-system-iannis-xenakis-france-1977/> )
- **Εικόνα 6:** Από τον ιστότοπο *Uoregon.edu* ( <https://blogs.uoregon.edu/222s16/2016/04/04/see-and-hear-this-diagram-iannis-xenakis-metastasis/> )
- **Εικόνα 7:** Kristy W., « Project 3—Sound/Ambience: Iannis Xenakis », από τον ιστότοπο: *Medium.com* ( <https://medium.com/@risingskies2/project-3-sound-ambience-iannis-xenakis-65d62dc4b640> )
- **Εικόνα 8:** Parthenios,Panagiotis, « Reciprocal transformations between music and architecture as a real-time supporting mechanism in urban design » [figure 1], από τον ιστότοπο: *Research gate* ( [https://www.researchgate.net/figure/Philips-Pavilion-Metastaseis-B-Iannis-Xenakis-1953-1958\\_fig1\\_308759695](https://www.researchgate.net/figure/Philips-Pavilion-Metastaseis-B-Iannis-Xenakis-1953-1958_fig1_308759695) )
- **Εικόνα 9:** Beilharz, Kirsty, « Designing Sounds and Spaces: Interdisciplinary Rules & Proportions in Generative Stochastic Music andArchitecture », [ figure 11], από τον ιστότοπο: *Semantic Scholar* ( <https://www.semanticscholar.org/paper/Iannis-Xenakis's-Achorripsis%3A-The-Matrix-Game-Arsenault/244f2e35a63410d44def20feb8f931e0b24d9bfa> )
- **Εικόνα 10:** Arsenault, Linda M., « Iannis Xenakis's Achorripsis: The Matrix Game », [figure 1] , από τον ιστότοπο: *Semantic Scholar* ( <https://www.semanticscholar.org/paper/Iannis-Xenakis's-Achorripsis%3A-The-Matrix-Game-Arsenault/244f2e35a63410d44def20feb8f931e0b24d9bfa> )
- **Εικόνα 11:** « Xenakis in his studio », Circa, 1989, από τον ιστότοπο: *Iannis-xenakis.org* ( <http://www.iannis-xenakis.org/xen/look/photos.html> )