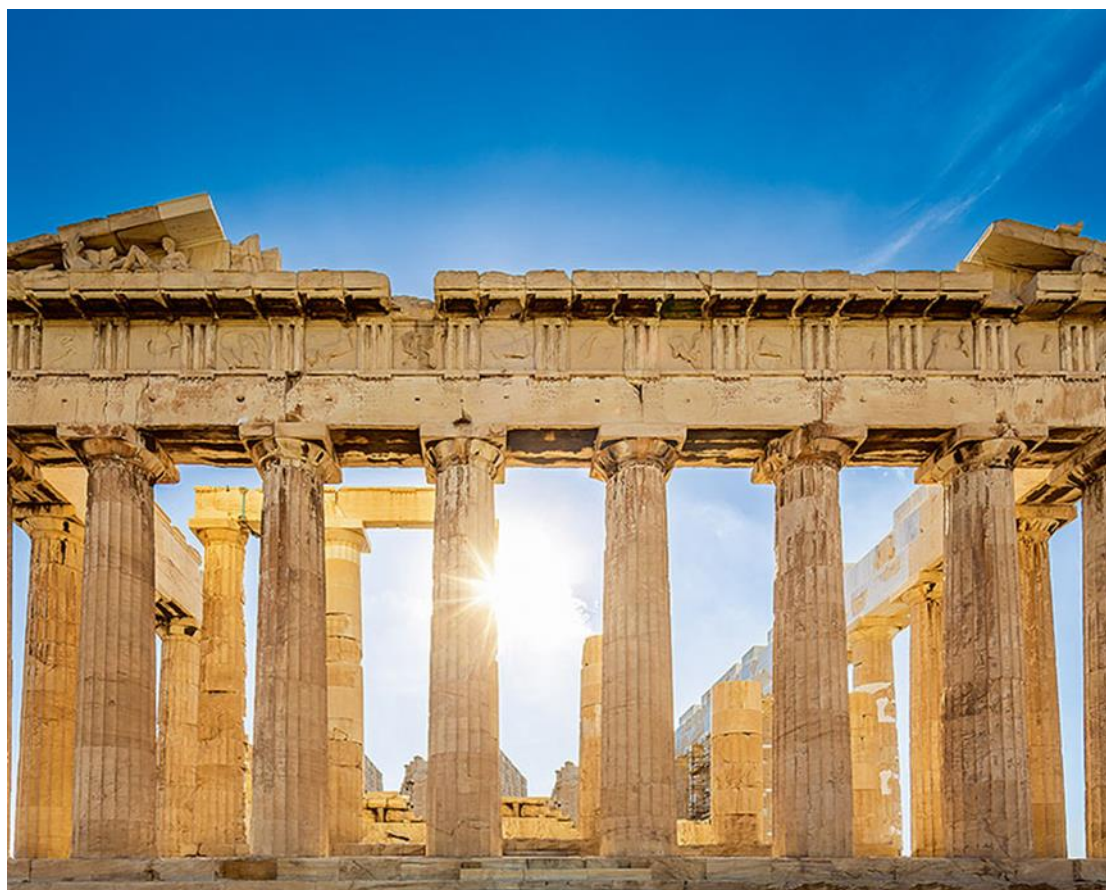


Παρθενώνας: Ένα «Χρυσό» Σύμβολο



Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	3
---------------	---

ΜΕΡΟΣ 1: Σύντομη Επισκόπηση της επιστήμης των Μαθηματικών και η Χρυσή Τομή

Τα Μαθηματικά μέχρι το 600 π.Χ.....	5
Τα Ελληνικά Μαθηματικά.....	6
Οι Πυθαγόρειοι.....	8
Αναλογίες.....	9
Ο αριθμός ϕ	10
Η τιμή του ϕ και μερικές ιδιότητές του.....	12
Γεωμετρική Κατασκευή της Χρυσής Τομής.....	15
Κατασκευή Χρυσού Ορθογωνίου και Χρυσής Σπείρας.....	17
Ακολουθία Fibonacci και Χρυσή Τομή.....	20

ΜΕΡΟΣ 2: Αρχιτεκτονική και Μαθηματικά

Αρχιτεκτονική και Μαθηματικά.....	22
Γεωμετρία και Αρχιτεκτονική στην Αρχαία Ελλάδα.....	23
Τα Είδη και η Δομή των Αρχαιοελληνικών Ναών.....	25

ΜΕΡΟΣ 3: Ο Παρθενώνας ως μοντέλο ύπαρξης του αριθμού ϕ

Ιστορικό Πλαίσιο του Παρθενώνα.....	29
Η Αρχιτεκτονική του Παρθενώνα.....	32
Εκλεπτύνσεις και Οπτικές Πλάνες στον Παρθενώνα.....	34
Παρθενώνας και Μαθηματικά.....	40
Παρθενώνας και Χρυσή Τομή.....	42
Συμπεράσματα.....	48
Βιβλιογραφία.....	50

Εισαγωγή

Ο πολιτισμός της αρχαίας Ελλάδας αποτελεί πράγματι ένα μοναδικό φαινόμενο. Στην αρχαία Ελλάδα δημιουργήθηκαν τα σημαντικότερα ίσως στοιχεία που μετέπειτα ενσωματώθηκαν στην γενικότερη έννοια του Ευρωπαϊκού πολιτισμού. Οι εικαστικές τέχνες, το θέατρο, η δημοκρατία, τα Μαθηματικά είναι μερικά μόνο από τα επιτεύγματά που άφησαν ανεξίτηλα τα σημάδια τους στην πάροδο του χρόνου.

Τα Μαθηματικά σαν αφηρημένη επιστήμη συνεχίζουν (και δεν θα πάνσουν) να προκαλούν δέος σε πολλούς είτε λόγω της «δυσκολίας» τους είτε λόγω της «ομορφιάς» τους. Από αυτή την δυσκολία εμπνεύστηκε ο Darren Aronofsky για την ταινία του «π» το 1998 και από την ομορφιά του «φ» ο Dan Brown τον «Κώδικα Da Vinci» το 2003. Δεν είναι όμως μόνο η λογοτεχνία και ο κινηματογράφος που αντλούν έμπνευση από τα Μαθηματικά.

Πέρασαν περίπου 2000 χρόνια από την ανακάλυψη της «διαίρεσης ενός ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο» μέχρι ο αριθμός «φ» να πάρει το όνομά του στις αρχές του 20^{ου} αιώνα προς τιμή του Φειδία. Έτσι, ένα από τα σπουδαιότερα οικοδομήματα του αρχαίου κόσμου, ο Παρθενώνας, γίνεται σύμβολο όχι μόνο του δυτικού πολιτισμού και της δημοκρατίας αλλά και σύμβολο της ομορφιάς των Μαθηματικών. Από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα και τις πρώτες μετρήσεις του Penrose (1888), γίνονται προσπάθειες απόδειξης της ύπαρξης ή μη του αριθμού «φ» στο ναό του Παρθενώνα. Αυτές οι προσπάθειες μπορούν να ενταχθούν στο πλαίσιο μίας διαδικασίας κατά την οποία επιχειρείται ο συνδυασμός δύο θεμελιακών πεδίων, των Μαθηματικών και της αρχαίας Ελληνικής κληρονομιάς.

Στο πέραςμα του χρόνου συνεχίζονται οι δημόσιες συζητήσεις για αυτό το ενδεχόμενο. Οι δυσκολίες για την προσπάθεια αυτή είναι πολλές, ιστορικής και μαθηματικής φύσης. Από ιστορική σκοπιά, δεν υπάρχουν δεδομένα πως οι αρχιτέκτονες γνώριζαν την ύπαρξη του αριθμού «φ» αλλά και αν την γνώριζαν, αν είχαν σκοπό να τον χρησιμοποιήσουν. Από μαθηματικής σκοπιάς, η αρρητότητα του αριθμού είναι αδύνατο πρακτικά να επιτρέψει την απόδειξη ή μη του αριθμού.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να δώσει στον αναγνώστη μία σύντομη επισκόπηση της επιστήμης των Μαθηματικών μέχρι και την ανέγερση του Περικλείου Παρθενώνα καθώς και να γίνει μία σύντομη και περιεκτική εισαγωγή στις έννοιες του λόγου, της αναλογίας και της «Χρυσής Τομής». Επίσης, γίνεται αναφορά στο ιστορικό πλαίσιο της ανοικοδόμησης του Παρθενώνα καθώς και στην «πορεία» του ναού μέσα στους αιώνες και στη συνέχεια, της αρχιτεκτονικής του. Τέλος, γίνεται απόπειρα μίας βιβλιογραφικής επισκόπησης του δημόσιου και επιστημονικού διαλόγου για την ύπαρξη του «Χρυσού Λόγου» στον Παρθενώνα καθώς και μία αναφορά στις νεότερες προσπάθειες συμβολοποίησης του Παρθενώνα ως ένα «χρυσό» (και γενικότερα μαθηματικό) οικοδόμημα.

Τα Μαθηματικά μέχρι το 600 π.Χ.

Η «προϊστορία» των Μαθηματικών ξεκινά πολλές χιλιάδες χρόνια πριν. Στη Ναμίμπια, ακόμα και σήμερα, χρησιμοποιούν κάποιου είδους ραβδιά για να καταγράφουν την παρέλευση του χρόνου. Ένα τέτοιου είδους ραβδί είναι η παλαιότερη ένδειξη αριθμητικής καταγραφής η οποία βρέθηκε στα Όρη Λεμόμπο στην Αφρική και είναι μία περόνη μπαμπούνου με 29 εγκοπές που χρονολογείται από το 35000 π.Χ.¹ Επίσης, μία κερκίδα λύκου με 55 εγκοπές που βρέθηκε στην Τσεχία και χρονολογείται από το 30000 π.Χ.² Τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά ευρήματα μαζί με πολλά άλλα αποδεικνύουν τη σημασία που έδιναν οι άνθρωποι της ανώτερης παλαιολιθικής περιόδου στη μέτρηση, στην καταγραφή και στην παρατήρηση.

Σε αντίθεση βέβαια με την Αριθμητική, η Γεωμετρία φαίνεται να ξεκίνησε αργότερα, αλλά μάλλον νωρίτερα από την γραφή, και υπάρχουν δύο επικρατούσες απόψεις σχετικά με την προέλευσή της. Ο Αριστοτέλης και ο Ηρόδοτος υποστηρίζουν πως η Γεωμετρία προέρχεται από την Αίγυπτο αλλά διαφωνούν ως προς την αιτία της γένεσής της.

Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει πως η έμπνευση προήλθε από μία αργόσχολη ιερατική τάξη της Αιγύπτου ενώ ο Ηρόδοτος ότι εμφανίστηκε λόγω της ανάγκης για εκτίμηση των ζημιών από τις πλημμύρες του ποταμού Νείλου.³ Συγκεκριμένα, ο Ηρόδοτος αναφέρει πως ο Σέσωστρις ή Ραμσής Β', γύρω στα 1300 π.Χ. μοίρασε τη γη σε όλους τους Αιγύπτιους, χωρίζοντάς την σε ίσες ορθογώνιες παραλληλόγραμμες εκτάσεις, για τις οποίες επέβαλε έναν ετήσιο φόρο. Έτσι, όταν ο ποταμός πλημμύρισε μέρος μιας έκτασης και ο ιδιοκτήτης ζήτησε αντίστοιχη μείωση φόρου, απεστάλησαν επί τόπου κτηματογράφοι ώστε να επαληθεύσουν το ποσοστό της κατεστραμμένης επιφάνειας. Η ίδια ιστορία επαναλαμβάνεται και από άλλους συγγραφείς όπως ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς, ο Διόδωρος Σικελιώτης και ο Στράβων.⁴ Για αυτό τον λόγο

¹Livio, M., *Ο χρυσός λόγος: Η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού*, Ενάλιος, Αθήνα, 2002, σ.33.

²Mankiewicz, R., *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Αλεξάνδρεια, Αθήνα, 2000, σ. 10.

³Boyer, H., Merzbach, U., *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Πνευματικός, Αθήνα, 1997, σ. 6.

⁴Heath, L. T., *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, τ.1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης – Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001, σ. 158.

ίσως έχει επικρατήσει η άποψη του Ηρόδοτου και σε όλα τα σχολικά εγχειρίδια αποκαλύπτεται το πρόβλημα των πλημμυρών του Νείλου σαν πηγή έμπνευσης για τις ιδέες της Γεωμετρίας.

Οι Αιγύπτιοι με τους πάπυρους και οι Βαβυλώνιοι με τα σφηνοειδή κείμενα συνέχισαν να παράγουν γνώση πάνω στην Αριθμητική αλλά και τη Γεωμετρία. Χαρακτηριστικά παραδείγματα διάφοροι πάπυροι, όπως ο πάπυρος του Ριντ (1650 π.Χ.), ο οποίος γράφτηκε από έναν γραφέα με όνομα Αχμής. Στον πάπυρο αναφέρεται πως ο Αχμής αντιγράφει ένα πρωτότυπο δύο αιώνες παλαιότερο με εισαγωγική φράση «μία πλήρης μελέτη όλων των πραγμάτων, μία εις βάθος ανάλυση όλων όσων υπάρχουν, αποκάλυψη όλων των σκοτεινών μυστικών».⁵ Άλλα ευρήματα αποτελούν ο πάπυρος του Καχούν, δύο ξύλινες πλάκες από το Κάιρο του 2000 π.Χ. και ο πάπυρος της Μόσχας, όπου όλοι του απεικονίζουν γεωμετρικά προβλήματα πρακτικής, προφανώς, φύσεως.⁶ Οι Βαβυλώνιοι με τη σειρά τους μας άφησαν τεκμήρια σε μορφή πήλινων πινάκων με σφηνοειδείς επιγραφές. Αυτές χωρίζονται σε «πινακίδια πινάκων» και «πινακίδια προβλημάτων».⁷ Γνώριζαν και κατέγραφαν στους πίνακες αυτούς αντίστροφους αριθμούς, δυνάμεις αριθμών μέχρι και επίλυση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.⁸ Και οι δύο αυτοί πολιτισμοί αντλούσαν τα αποτελέσματα τους από τη μέθοδο «δοκιμής – σφάλματος» χωρίς να έχουν θεωρητικοποιήσει τα αποτελέσματα τους.

Τα «Ελληνικά» Μαθηματικά

Η ιστορική ανάλυση που χαρακτηρίζει τα κείμενα που έχουν βρεθεί από Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους αποδεικνύει πως τα προ-Ελληνικά Μαθηματικά ήταν καθαρά εμπειρικά. Αυτή η γνώση προέκυψε ως αποτέλεσμα μακρόχρονων παρατηρήσεων και προσπαθειών του ανθρώπου κατά την πορεία του προς τον «πολιτισμό» και κάτω από την πίεση των αναγκών του για επιβίωση και βελτίωση των συνθηκών της ζωής του. Τα προ-Ελληνικά Μαθηματικά δεν είχαν τον χαρακτήρα της παραγωγικής

⁵Mankiewicz, R., *ό.π.*, σ. 12.

⁶Boyer, H., Merzbach, U., *ό.π.*, σ. 20-22.

⁷Eves, H., *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Dover Publications, Mineola, N.Y., 1997, σ. 2-4.

⁸Mankiewicz, R., *ό.π.*, σ. 11.

(αποδεικτικής – συμπερασματικής) επιστήμης. Η αλλαγή προς αυτή την κατεύθυνση ξεκίνησε περίπου το 600 π.Χ.

Η αρχή της ρίψης των θεμελίων του μεγάλου αυτού οικοδομήματος των Μαθηματικών, και πιο συγκεκριμένα της Γεωμετρίας, θα γίνει από τον Θαλή τον Μιλήσιο. Ο Θαλής έμεινε στην Ιστορία ως σπουδαίος γεωμέτρης και κατάφερε με την βοήθεια των διαδόχων του να φτάσει η ανθρωπότητα στο σημείο να χαρακτηρίσει τα «Μαθηματικά ως Ελληνική Επιστήμη».⁹ Ο Θαλής θαυμάστηκε από Αιγυπτίους καθώς κατάφερε να μετρήσει το ύψος των πυραμίδων, βασιζόμενος στο μήκος της σκιάς τους και της σκιάς μιας ράβδου που κάρφωνε στο έδαφος.¹⁰ Γνωστό από τα σχολικά χρόνια όλων είναι και το αποκαλούμενο το «Θεώρημα του Θαλή» που αναφέρει πως «όταν παράλληλες ευθείες τέμνονται από δύο άλλες ευθείες τότε τα τμήματα μεταξύ των παραλλήλων που ορίζονται στην μια τέμνουσα, είναι ανάλογα». Στον Θαλή αποδίδεται η ιδέα της θεώρησης των Μαθηματικών ως απαγωγικής επιστήμης με την επινόηση της «απόδειξης μιας πρότασης». Ο Πλούταρχος είχε γράψει ότι «ο Θαλής προφανώς ήταν ο μόνος που η σοφία του προχώρησε, στη θεωρία, πέρα από τα όρια της πρακτικής χρησιμότητας».¹¹

Θα ήταν άτοπο, λόγω της θέσης του έργου του Ευκλείδη στην παγκόσμια κληρονομιά, να θεωρήσει κανείς πως μεταξύ του Θαλή (≈600 π.Χ.) και του Ευκλείδη (≈300 π.Χ.) δεν σημειώθηκε πρόοδος στα Μαθηματικά. Στο προσκήνιο εμφανίστηκαν ο Πυθαγόρας (≈550 π.Χ.) και οι Πυθαγόρειοι στους οποίους οφείλεται η γνώση που παράχθηκε για ανώτερη γεωμετρία και αργότερα συμπεριλήφθηκε στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Αυτή η ανάπτυξη της γεωμετρίας συνέβη προκειμένου να λυθούν τα περίφημα «τρία προβλήματα της αρχαιότητας»: ο τετραγωνισμός του κύκλου, η τριχοτόμηση της γωνίας και ο διπλασιασμός του όγκου του κύβου.¹² Θα πρέπει, ωστόσο, να θεωρηθεί βέβαιο πως πάνω στα θεμέλια που έβαλε ο Θαλής, έχτισαν ο Πυθαγόρας και οι Ευκλείδης την συνέχιση και γιγάντωση των Μαθηματικών ως απαγωγικής επιστήμης.

⁹Heath, L. T., *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, τ.1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης – Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001, σ. 88.

¹⁰Γκουντουβάς, Σ., *Γεωμετρικές Διαδρομές: Θέματα Γεωμετρίας από την Αρχαιότητα ως τον 20^ο αιώνα*, Αθήνα, 2015, σ. 18-21.

¹¹Davis, M. D., *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2015, σ.17

¹²Eves, H., *ό.π.*, σ. 13

Οι Πυθαγόρειοι

Ενώ δεν θα μπορούσαμε με βεβαιότητα να αποδώσουμε συγκεκριμένες μαθηματικές προτάσεις είτε στον Πυθαγόρα είτε στους μαθητές του, ωστόσο θεωρείται βέβαιο πως ευθύνονται για την παραγωγή ιδεών ως ένα κράμα μαθηματικών, φιλοσοφίας και θρησκείας. Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι έμειναν στην ιστορία για τον ρόλο που τους αποδίδεται στην ανάπτυξη και εξέλιξη των Μαθηματικών ώστε αυτά να βρίσκουν εφαρμογή στην ιδέα της «τάξης» σε όλες τις πτυχές της ανθρώπινης ζωής, από την μουσική μέχρι τον Κόσμο.¹³

Για του Πυθαγόρειους, όλα τα πράγματα δεν διαθέτουν απλώς μία αριθμητική υπόσταση αλλά είναι τα ίδια αριθμοί.¹⁴ Πίστευαν ότι στους αριθμούς βρίσκονται, περισσότερο απ' ό,τι στο πυρ, στη γη ή στο νερό, πολλές ομοιότητες προς τα πράγματα τα οποία υπάρχουν και εξελίσσονται. Πάνω σε αυτή την ιδέα της «τάξης» θεώρησαν πως οι φυσικοί¹⁵ και οι ρητοί¹⁶ αντιστοιχούσαν σε διάφορες ιδιότητες. Για παράδειγμα, το 2 ήταν το αρσενικό γένος, το 3 το θηλυκό, το 4 η δικαιοσύνη, το 5 ο γάμος, το 7 η υγεία.¹⁷ Επίσης, κάποια ιδιότητα των αριθμών είναι η δικαιοσύνη, η ψυχή και η νόηση, η ευκαιρία κ.ο.κ.¹⁸ Δεν θα μπορούσαν στην θεώρηση τους να αφήσουν εκτός και την μουσική. Έτσι, ανακάλυψαν πως όταν σε μουσικές χορδές ασκείται ίδια δύναμη, η αναλογία 2:1 παράγει μία οκτάβα, η αναλογία 3:2 μία πέμπτη και η αναλογία 4:3 μία τέταρτη.¹⁹

Τέλος, η χρήση από τους Πυθαγόρειους των ορατών στιγμών (σημείων), προκειμένου να αναπαραστήσουν τις μονάδες ενός αριθμού ιδιαίτερου είδους, διαφωτίζεται από τον Αριστοτέλη. Οι Πυθαγόρειοι αντιμετώπιζαν τη μονάδα, η οποία είναι ένα σημείο

¹³Livio, M., *ό.π.*, σ.47

¹⁴Heath, L. T., *ό.π.*, σ. 91.

¹⁵Δεν υπάρχει καθολική συμφωνία στη μαθηματική κοινότητα για το αν θα συμπεριλαμβάνεται το μηδέν (0) στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Κάποιοι μαθηματικοί ορίζουν τους φυσικούς αριθμούς να είναι οι θετικοί ακέραιοι $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ ενώ για άλλους ο όρος προσδιορίζει τους μη αρνητικούς ακεραίους $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ο τελευταίος ορισμός εμφανίζεται για πρώτη φορά τον 19ο αιώνα.

¹⁶Ρητοί αριθμοί είναι εκείνοι οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν ως κλάσμα ακεραίων της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί, με ν διάφορο του μηδενός.

¹⁷Davis, M. D., *ό.π.*, σ. 24. Για τους Πυθαγόρειους επίσης βλ. Lloyd, G. E. R., *Αρχαία Ελληνική Επιστήμη*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2014, κεφάλαιο 3.

¹⁸Heath, L. T., *ό.π.*, σ. 92.

¹⁹Davis, M. D., *ό.π.*, σ. 24.

χωρίς θέση (στιγμή άθετος), ως σημείο και το σημείο ως μονάδα με θέση (μονάς θέσιν έχουσιν).²⁰

Σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται εύκολα αντιληπτό πως για τους Πυθαγόρειους το υπέρτατο δόγμα ήταν το «αριθμόν είναι την ουσίαν απάντων».²¹ Αυτό το δόγμα μεταφερόταν στην αριθμητική τους ως εξής: για κάθε αριθμό α , και για κάθε αριθμό β , ορίζεται ένας αριθμός, λόγος του ενός προς τον άλλον. Ενώ στη Γεωμετρίας τους μεταφράζεται ως εξής: για κάθε μέγεθος α και για κάθε ομοειδές του μέγεθος β , ορίζεται επίσης ένας αριθμός λόγος του ενός προς τον άλλον.²²

Υπήρξε όμως από τους ίδιους τους Πυθαγόρειους, μία πρόταση -αποκάλυψη για την κοσμοθεωρία τους. Απέδειξαν πως υπάρχουν μεγέθη ομοειδή για τα οποία δεν οριζόταν ο λόγος τους, μεγέθη ά-λογα, ασύμμετρα μεταξύ τους, άρρητα, αδύνατον να εκφραστούν το ένα μέσω του άλλου. Πρωτεργάτης αυτής της σπουδαίας απόδειξης θεωρείται ο Ίπασος ο Πυθαγόρειος με την ανακάλυψη του λόγου κάθε πλευράς προς τη διαγώνιο κανονικού πενταγώνου (το οποίο αποτελεί την έδρα κανονικού δωδεκάεδρου) που είναι ασύμμετρος αριθμός. Ο Ιάμβλιχος γράφει, «εξ' αιτίας του ότι πρώτος ανακάλυψε και περιέγραψε σφαίρα περί κανονικό δωδεκάεδρον χάθηκε στη θάλασσα, επειδή ασέβησα θέλοντας να λάβει δόξα ως ευρετής, ενώ όλα ήταν εκείνου του ανδρός (Πυθαγόρα)».²³

Αναλογίες

Στην καθημερινή ζωή, η λέξη «αναλογία» χρησιμοποιείται είτε για συγκριτική σχέση μεταξύ μερών αντικειμένων σε σχέση με το μέγεθος ή την ποσότητα είτε όταν θέλουμε να περιγράψουμε μία αρμονική σχέση μεταξύ διαφορετικών μερών. Στα Μαθηματικά όμως ο όρος «αναλογία» είναι μία σχέση ισότητας, όπως θα οριστεί παρακάτω. Σκοπός κάθε συστήματος αναλογιών είναι να αντανakλά ή να δημιουργεί μια αίσθηση τάξης μεταξύ των στοιχείων μιας σύνθεσης. Η χρήση αναλογιών εδραιώνει σχέσεις μεταξύ των μερών και του όλου.

²⁰Heath, L. T., *ό.π.*, σ. 93.

²¹Heath, L. T., *ό.π.*, σ. 152.

²²Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι για τους Πυθαγόρειους, «αριθμός» σήμαινε ο θετικός ακέραιος αριθμός και λόγος αυτών ήταν κατά την σύγχρονη ορολογία ένας ρητός αριθμός.

²³Κοντογιάννης, Δ., Ντιαχρήτος, Β., Τσιγώνη, Τ., «Βιβλίο IV», στο Εξαρχάκος Θ. (επιμ.), *Ενκλείδη Στοιχεία, Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό, Η Γεωμετρία του Επιπέδου*, τ. 1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.), Αθήνα, 2001, σ. 349.

Ο λόγος είναι μια ποσοτική σύγκριση μεταξύ δύο μεγεθών (αριθμητικών, γεωμετρικών και άλλων), και εκφράζεται με το γενικό τύπο $\frac{\alpha}{\beta}$. Όταν οι δύο ποσότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια του κοινού τους μέτρου, ονομάζονται σύμμετρα, και ο λόγος τους είναι ρητός αριθμός. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζονται ασύμμετρα και ο λόγος τους είναι άρρητος αριθμός.

Η αναλογία είναι μια σχέση ισότητας μεταξύ δύο λόγων που εκφράζεται από το γενικό τύπο $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ή $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$, δηλαδή τα μεγέθη α και γ είναι ανάλογα προς τα μεγέθη β και δ . Μια αναλογία τεσσάρων όρων, όπου οι α και δ καλούνται άκροι όροι και οι β και γ , μέσοι όροι, ονομάζεται ασυνεχής. Η αναλογία στην οποία οι μέσοι όροι είναι ίσοι, δηλαδή της μορφής $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\beta^2 = \alpha \cdot \delta$, ονομάζεται συνεχής και ο β , γεωμετρικός μέσος ή μέση ανάλογο των α και δ .

Ο «Αριθμός φ»

Σίγουρα θα υπάρχει κάτι τόσο συναρπαστικό που οι αρχαίοι Έλληνες, οι αναγεννησιακοί καλλιτέχνες, ένας αστρονόμος του 17ου αιώνα και ένας μυθιστοριογράφος του 21ου αιώνα θα έγραφαν για έναν συγκεκριμένο αριθμό. Είναι ένας αριθμός με πολλά ονόματα. Αυτός ο «χρυσός» αριθμός, 1.61803399..., που αντιπροσωπεύεται από το ελληνικό γράμμα «φ», είναι γνωστός ως ο Χρυσός Λόγος, ο Χρυσός Αριθμός, η Χρυσή Αναλογία, το Χρυσό Μέσο, το Χρυσό Τμήμα, η Θεία Αναλογία και το Θείο Τμήμα. Η απόδειξη της ύπαρξης αυτού του αριθμού οφείλεται στον Πυθαγόρα και σε κάποιες περιπτώσεις στην σύζυγό του, Θεανώ.²⁴ Ωστόσο, σε αυτόν τον αριθμό αναφέρθηκε πρώτος ο Ευκλείδης στο έργο του «Στοιχεία» γύρω στο 300 π.Χ. Στη συνέχεια, αναφέρθηκαν στη Χρυσή Τομή ο Luca Pacioli, συνεργάτης του Leonardo Da Vinci, στο «De Divina Proportione» το 1509, ο Johannes Kepler περίπου το 1600 και ο Dan Brown το 2003 στο μυθιστόρημα του, «Ο Κώδικας Ντα Βίντσι». Σύμφωνα με τον σπουδαίο Γερμανό μαθηματικό Johannes Kepler, η Γεωμετρία έχει δύο μεγάλους θησαυρούς, το Πυθαγόρειο Θεώρημα και την διαίρεση σε άκρο και μέσο λόγο.²⁵

²⁴Osen, M. L., *Women in Mathematics*, Cambridge, Mass., MIT Press, 1975, σ. 22.

²⁵Jarvis, D., Adams, L. T., «Mathematics and Visual Arts: Exploring the Golden Ratio», *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2007, Vol. 12, No. 8, σ. 467-473.

Ο Ευκλείδης δεν αναφέρθηκε όμως με αυτό το όνομα, ούτε με τον συγκεκριμένο συμβολισμό από την αρχή. Για την ακρίβεια, είναι ακόμη υπό συζήτηση αν όντως αναφέρεται πρώτη φορά στα «Στοιχεία». Η φτωχή ποιότητα και μικρή ποσότητα των διαθέσιμων αρχαιολογικών ευρημάτων θεμελιώνουν την αδυναμία μας να συλλάβουμε τη συνολική εικόνα των απαρχών της κειμενικής παράδοσης των «Στοιχείων». Η ασάφεια, όμως, που προκύπτει από την έλλειψη πολλών και καλοδιατηρημένων παπύρων αντισταθμίζεται μερικώς από τη βεβαιότητα ότι η μικρή διάρκεια ζωής ενός παπύρου επέβαλλε τη συστηματική του αντιγραφή.²⁶ Για το όνομα ευθύνεται ένα βιβλίο που δημοσιεύθηκε στην Ιταλία αρχές 16^{ου} αιώνα ενώ το γράμμα «φ» το υιοθέτησε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, για τον αριθμό αυτόν, ο Αμερικανός μαθηματικός Mark Barr, προς τιμή του Έλληνα γλύπτη Φειδία, καθώς φαίνεται πως στα γλυπτά του τον χρησιμοποίησε αρκετές φορές.²⁷

Αναγεννησιακοί αρχιτέκτονες, καλλιτέχνες και σχεδιαστές μελέτησαν επίσης σχετικά με αυτό το ενδιαφέρον θέμα, τεκμηρίωσαν και χρησιμοποίησαν τις αναλογίες του Χρυσού Αριθμού σε επιφανή έργα τέχνης, γλυπτών, έργων ζωγραφικής και αρχιτεκτονικών δημιουργημάτων. Η Χρυσή Αναλογία θεωρείται ως η πιο ευχάριστη αίσθηση από την ανθρώπινη οπτική, κάτι που αποδεικνύεται μέσα από πειράματα,²⁸ αλλά βρίσκεται και στον φυσικό κόσμο. Η ύπαρξή της αποδεικνύεται μέσω των αναλογιών ανθρώπινου σώματος και του σώματος των ζώων, στα μοτίβα ανάπτυξης πολλών φυτών, εντόμων και επίσης στο μοντέλο του σύμπαντος.²⁹

Στην Ελλάδα, οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν για τον αριθμό $\pi = 3,14 \dots$ από το σχολείο αλλά σχετικά λίγοι ασχολούνται με τον αριθμό «φ», αν και υπάρχει αναφορά του στο σχολικό εγχειρίδιο της Γεωμετρίας της Β' Λυκείου της διαίρεσης ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο.³⁰ Ωστόσο, από ερευνητές προκύπτει το συμπέρασμα πως η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από την Τέχνη δίνει στον

²⁶Σάλιαρος, Μ., «Η χειρόγραφη παράδοση των Στοιχείων του Ευκλείδη», *ΝΕΥΣΙΣ*, Vol. 22, 2014, σ. 121-147.

²⁷Livio, M., *ό.π.*, σ.15 -19.

²⁸Vico-Prieto, A., Cagigas, A., Rosas, J., Callejas-Aguilera, J., «Experimental approach to the study of beauty: The role of golden proportion», *Psicológica*, 2016, Vol. 37, σ. 187-207.

²⁹Akhtaruzzaman, M., Shafie, A., «Geometrical Substantiation of Phi, the Golden Ratio and the Baroque of Nature, Architecture, Design and Engineering», *International Journal of Arts*, 2011, Vol.1, σ. 1-22.

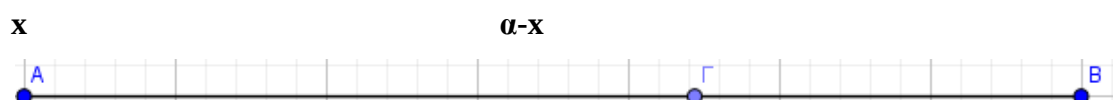
³⁰Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Γενικού Λυκείου, Υπουργείο Παιδείας. Έρευνας και Θρησκευμάτων, σ. 204.

καθηγητή το πλεονέκτημα της διαφορετικής προσέγγισης της επιστήμης των Μαθηματικών.³¹ Αν και τόσο το π όσο και το «φ» είναι άρρητοι αριθμοί³² με έναν άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, αξίζει να σημειωθεί, προς αποφυγή σύγχυσης, πως ο π είναι υπερβατικός αλλά ο ϕ αλγεβρικός.³³

Η τιμή του «φ» και μερικές ιδιότητές του

Η Χρυσή Τομή αναφέρεται στη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος AB από ένα εσωτερικό σημείο Γ, σε δύο άνισα τμήματα, ώστε να ισχύει η σχέση: $\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$ ισοδύναμα $AG^2 = AB \cdot GB$. Με άλλα λόγια, όπως αναφέρεται στο Βιβλίο ΣΤ' των Στοιχείων του Ευκλείδη, αναζητούμε ένα σημείο Γ, μεταξύ των Α και Β έτσι ώστε ότι είναι το μικρότερο ευθύγραμμο (GB) τμήμα για το μεγαλύτερο (ΑΓ), να είναι το μεγαλύτερο (ΑΓ) για το ολόκληρο (AB). Τότε το σημείο Γ ονομάζεται Χρυσή Τομή του AB, και το μεγαλύτερο τμήμα ΑΓ είναι η μέση ανάλογος του μικρότερου τμήματος GB και ολόκληρου του τμήματος AB.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το μήκος του μεγαλύτερου τμήματος ΑΓ, είναι ίσο με x , και το μήκος όλου του τμήματος AB είναι ίσο με a τότε σύμφωνα με τον ορισμό θα ισχύει: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ ή $x^2 + ax - a^2 = 0$. Αυτή η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$ και $x_2 = \frac{-a(\sqrt{5}+1)}{2}$. Για την ρίζα x_1 , δηλαδή για $a > 0$ προκύπτει $\frac{a}{x} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{x}{a-x}$, η οποία είναι η αναλογία της χρυσής τομής.



Για τον ακριβή υπολογισμό του αριθμού ϕ ας θεωρήσουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει μέτρο 1. Τότε η αναλογία θα πάρει την μορφή $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ ή $x^2 + x - 1 = 0$.

³¹Jarvis, D., Adams, L. T., «Mathematics and Visual Arts: Exploring the Golden Ratio», *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2007, Vol. 12, No. 8, σ. 467-473

³²Άρρητος αριθμός ονομάζεται κάθε πραγματικός αριθμός ο οποίος δεν είναι δυνατό να εκφραστεί ως κλάσμα της μορφής $\frac{p}{q}$, όπου p, q ακέραιοι αριθμοί, με q διάφορο του μηδενός, σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς, οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν ως κλάσμα ακεραίων.

³³Ένας υπερβατικός αριθμός είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός ο οποίος δεν προκύπτει ως ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Ο αλγεβρικός αριθμός μπορεί να προκύψει σαν ρίζα μιας τέτοιας εξίσωσης. Για παράδειγμα, ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αλλά όχι υπερβατικός καθώς είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$.

Λύνοντας αυτή την δευτεροβάθμια εξίσωση, θα προκύψουν οι ρίζες τις $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Η θετική ρίζα $x_2 = 1.6180339887 \dots$ είναι ο αριθμός φ.

Επίσης, ο περίεργος αριθμός, $A = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$ είναι ο αριθμός φ και ας δούμε το λόγο. Υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο προκύπτει $A^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$, δηλαδή $A^2 = 1 + A$ ή $A^2 - A - 1 = 0$. Και αυτή η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό φ.

Τέλος, μία ακόμη άπειρη παράσταση, που αφορά κλάσματα είναι η παρακάτω:

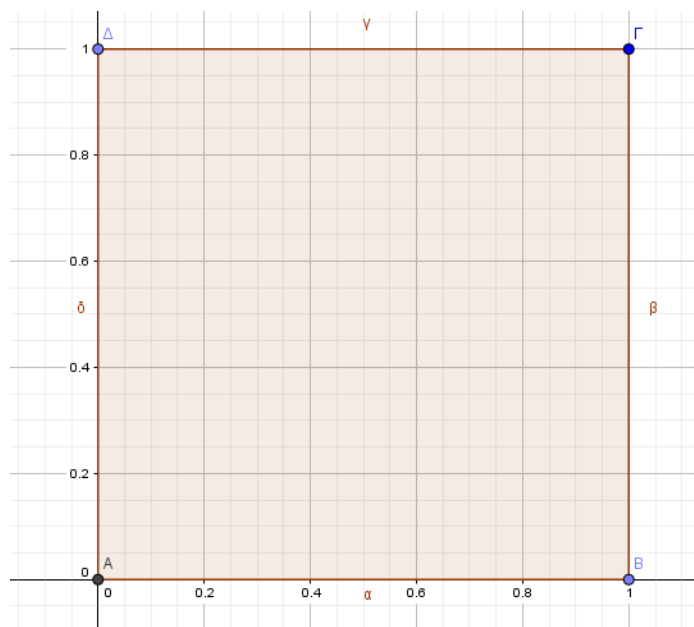
$$A = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Το παραπάνω κλάσμα ονομάζεται συνεχές. Ας παρατηρήσουμε πως ο παρονομαστής στη του δεύτερου όρου στο δεξί μέλος είναι το ίδιο το A. Επομένως, η εξίσωση παίρνει τη μορφή $A = 1 + \frac{1}{A}$. Και αυτή η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό φ.

Γεωμετρική Κατασκευή της Χρυσής Τομής

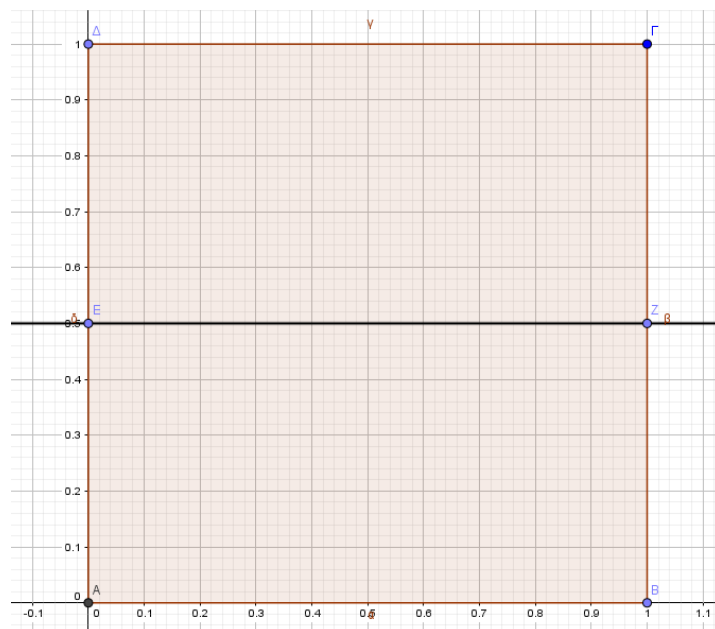
Για τις παρακάτω κατασκευές έγινε χρήση του εύχρηστου λογισμικού GeoGebra.

Κατασκευάζουμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 1.

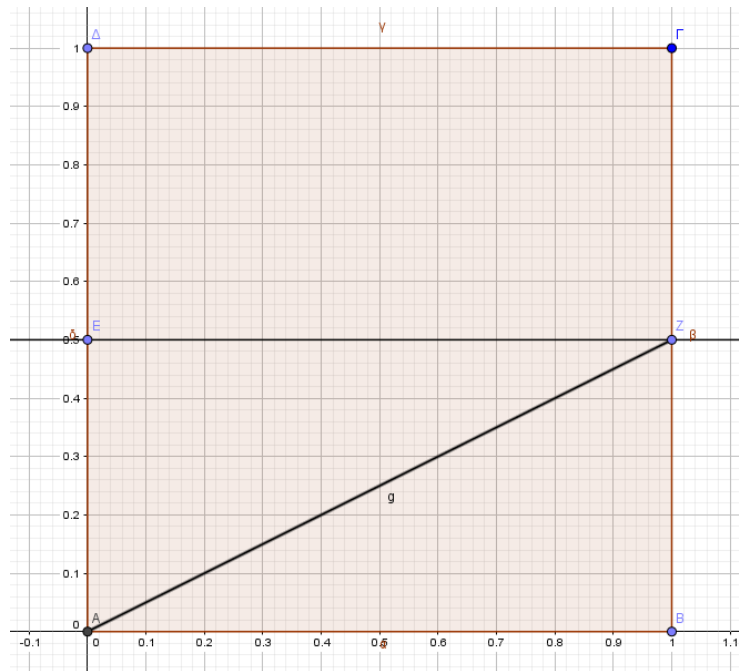


Φέρουμε ευθεία παράλληλη ΔE προς τη βάση του από το μέσο μίας του πλευράς.

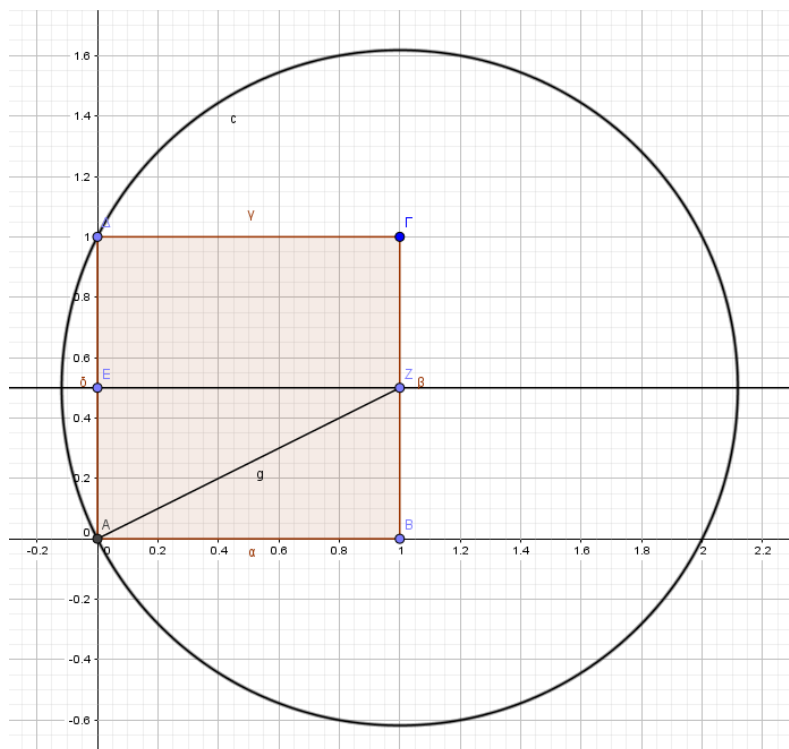
Έτσι προκύπτουν δύο ισεμβαδικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα.



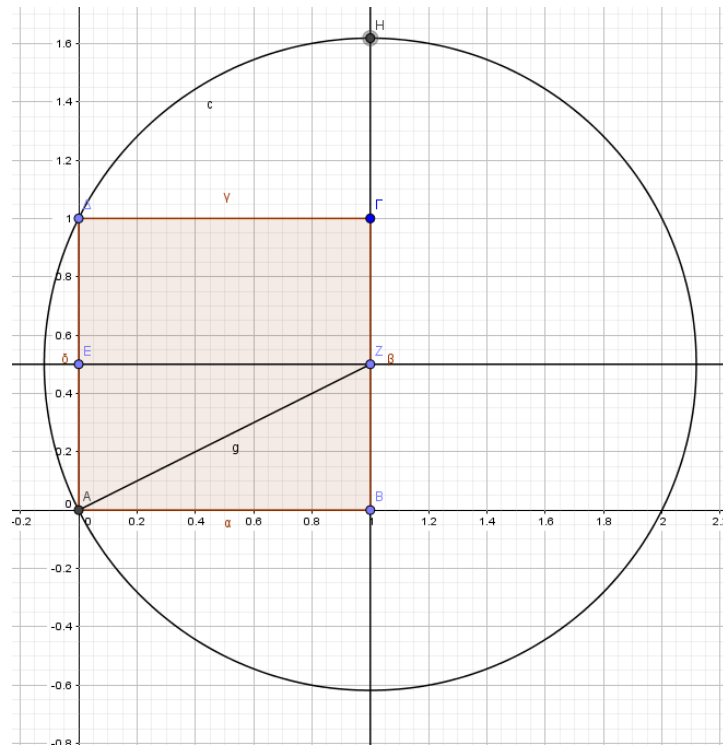
Φέρουμε μία διαγώνιο σε ένα από τα δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν κατασκευαστεί, την ΑΖ.



Κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το μέσο της μίας πλευράς Ζ του τετραγώνου και ακτίνα ίση με τη διαγώνιο του ορθογώνιου, ΑΖ.



Προεκτείνουμε την πλευρά του τετραγώνου στην οποία έχουμε ορίσει το κέντρο του κύκλου έως ότου η προέκταση να τμήσει τον κύκλο στο σημείο Η.

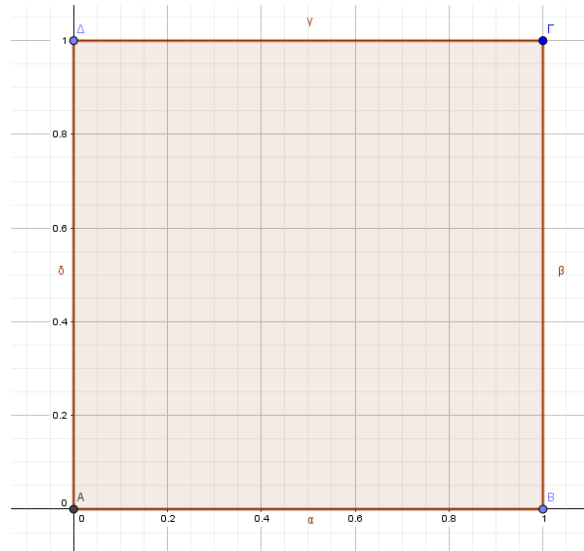


Το ευθύγραμμο τμήμα που προκύπτει ως άθροισμα της πλευράς του τετραγώνου και της προέκτασης, δηλαδή το BH έχει μήκος Φ .

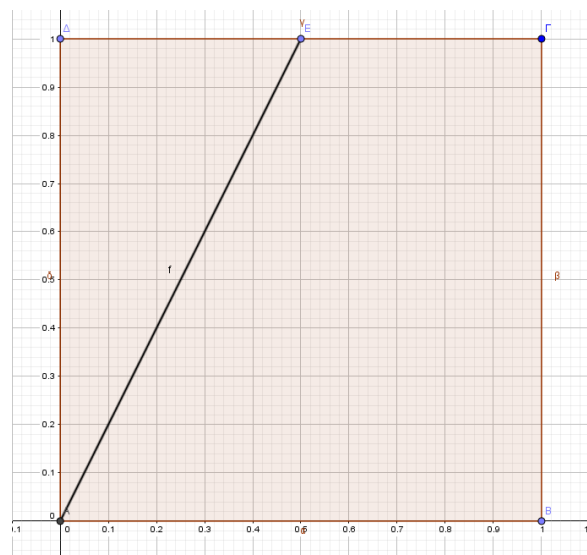
Κατασκευή Χρυσού Ορθογωνίου και η Χρυσή Σπείρα

Ο Χρυσός λόγος δεν εκφράζεται ούτε καθρεφτίζεται μόνο στην Άλγεβρα. Ας παρατηρήσουμε αρχικά πως κατασκευάζεται³⁴ ένα χρυσό ορθογώνιο.

Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο πλευράς 1, μίας μονάδας με την ευρύτερη έννοια.

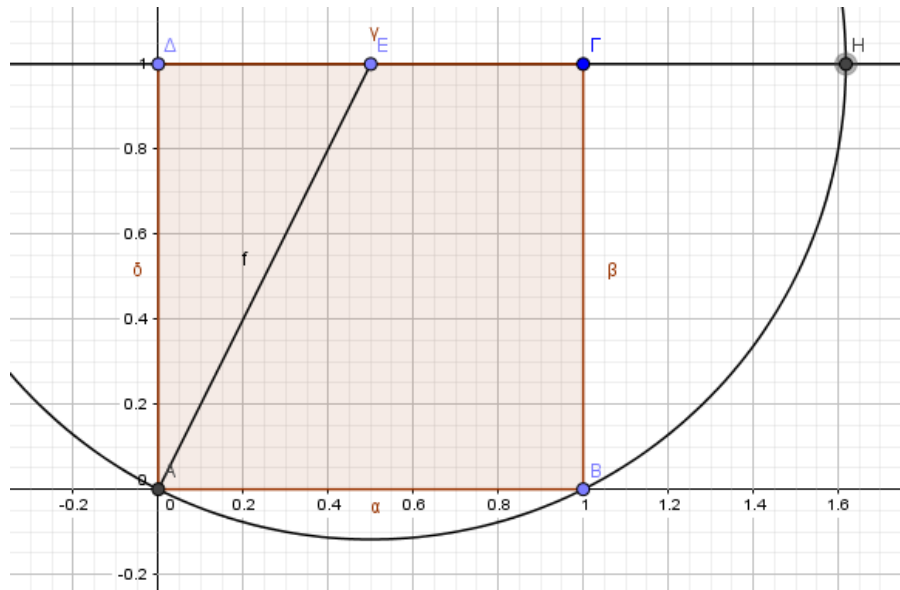


Στη συνέχεια βρίσκουμε το μέσο μίας πλευράς έστω Ε το μέσο της ΓΔ και φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το Ε με μία απέναντι γωνία, έστω την Α.

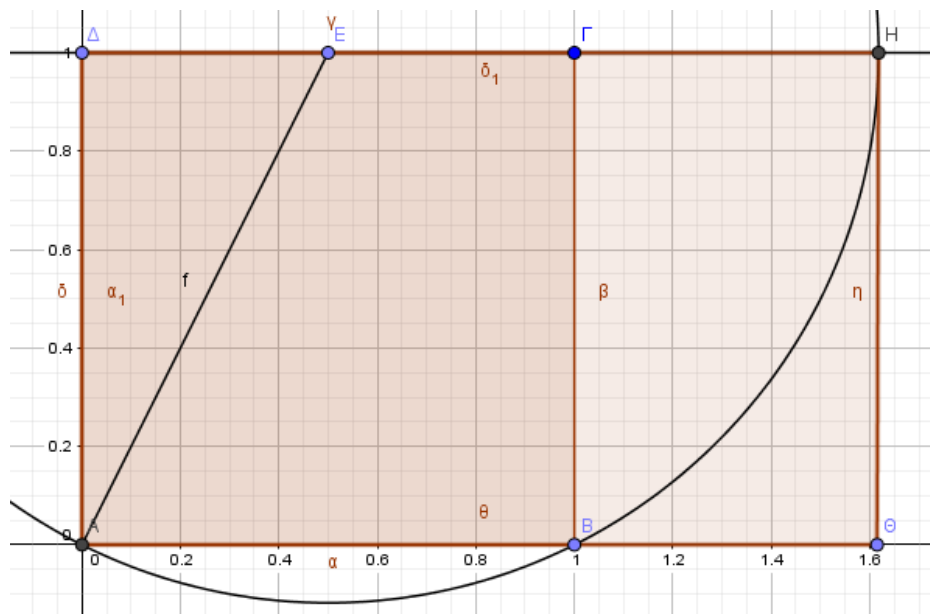


³⁴Μία γεωμετρική κατασκευή περιλαμβάνει σαν εργαλεία μόνο τον κανόνα και τον διαβήτη.

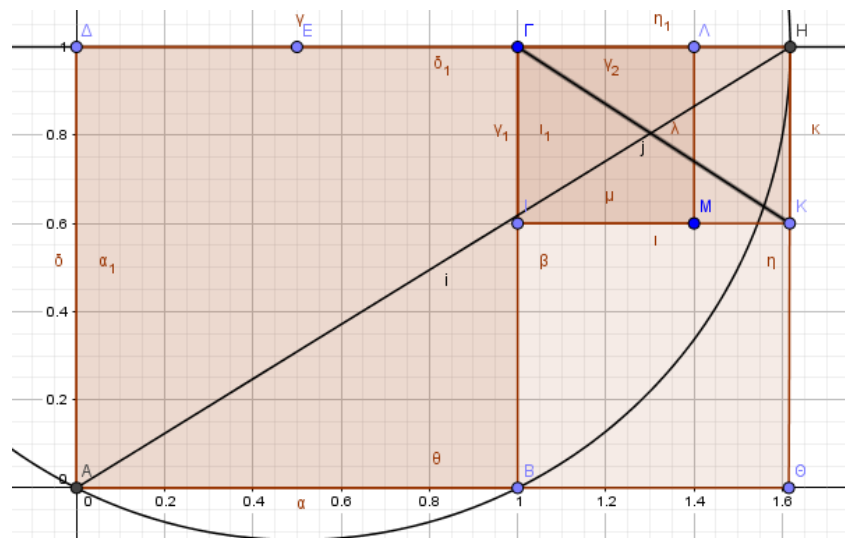
Έπειτα κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το μέσο E και ακτίνα AE . Ο κύκλος αυτός τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο H .



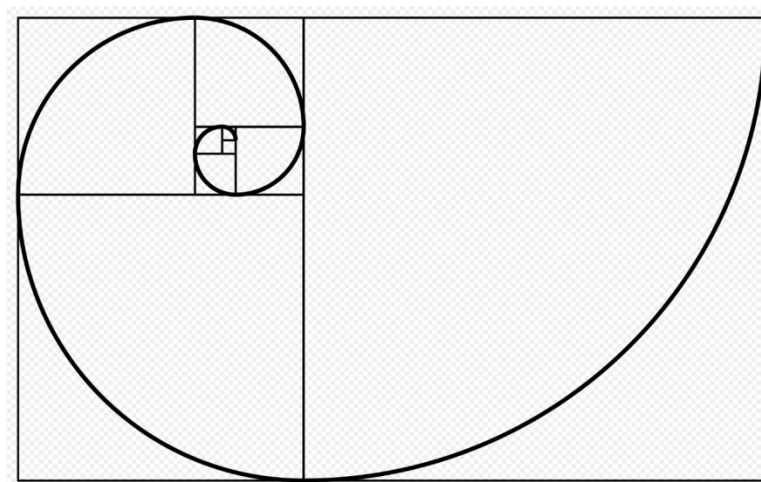
Τέλος, φέρουμε την κάθετη από το H στην προέκταση της AB , με σημείο τομής τους το Θ . Το $\Delta H \Theta$ είναι ένα χρυσό ορθογώνιο. Δηλαδή ο λόγος των κάθετων πλευρών του ισούται με $\varphi = 1,6180339887 \dots$



Αν τώρα αφαιρέσουμε ένα τετράγωνο από το χρυσό ορθογώνιο, θα προκύψει ξανά ένα μικρότερο χρυσό ορθογώνιο. Και αν ακολουθήσουμε αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον, πάντοτε θα προκύπτουν χρυσά ορθογώνια. Και αν φέρουμε τις διαγωνίους όλων των χρυσών ορθογώνιων, τότε αυτές θα τέμνονται στο ίδιο σημείο. Αυτό το σημείο ο μαθηματικός Clifford A. Pickover³⁵ προτείνει πως θα πρέπει να το αποκαλούμε ως «το μάτι του Θεού».



Τέλος, αν όπως κατασκευάσαμε τον κύκλο στην αρχή της κατασκευής μας, συνεχίζουμε να κατασκευάζουμε τέτοιους κύκλους, δηλαδή με κέντρο το εκάστοτε μέσο και ακτίνα ίση με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το μέσο με την απέναντι κορυφή στα τετράγωνα, προκύπτει η λεγόμενη Χρυσή Σπείρα.



³⁵Livio, M., ό.π., σ. 126.

Ακολουθία Fibonacci και Χρυσή Τομή

Ο Leonardo de Pisa γνωστός και ως Fibonacci (1170 –1250 μ.Χ.) υπήρξε Ιταλός μαθηματικός και συνέβαλε τα μέγιστα στην ανάπτυξη της βιβλιογραφίας γύρω από τη χρυσή τομή, μέσα από το βιβλίο του *Practica Geometriae* (Πρακτική Γεωμετρία). Όμως, η κύρια αιτία της φήμης του και της συνεισφοράς του στη χρυσή τομή, ήταν το «Βιβλίο του Άβακα» (*Liber Abaci*), βασισμένο στην αριθμητική και την άλγεβρα που είχε συγκεντρώσει από τα ταξίδια του. Με το βιβλίο αυτό, εισήγαγε το Ινδό-αραβικό δεκαδικό σύστημα παράστασης τιμών καθώς και τη χρήση των αραβικών αριθμών στην Ευρώπη δίνοντας ώθηση στη διευκόλυνση των εμπορικών συναλλαγών.³⁶ Καμία όμως προσπάθεια του δεν άφησε το σημάδι στην βιβλιογραφία που άφησε η λεγόμενη ακολουθία Fibonacci.

Στο τρίτο κεφάλαιο του *Liber Abaci*, διατύπωσε ένα πρόβλημα γνωστό ως «Πρόβλημα των Κουνελιών», που αφορούσε στην ανάπτυξη ενός (υποθετικού) πληθυσμού κουνελιών και το ζητούμενο ήταν να βρεθεί ο αριθμός των κουνελιών μετά από n μήνες, δεδομένου ότι τα ενήλικα κουνέλια παράγουν ένα ζευγάρι κουνελιών κάθε μήνα, και ο απόγονος χρειάζεται ένα μήνα για να φθάσει στην αναπαραγωγική ωριμότητα.³⁷ Η λύση του προβλήματος παρείχε στο μαθηματικό κόσμο μία ακολουθία αριθμών³⁸, στην οποία κάθε όρος (ξεκινώντας από τον τρίτο), ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων. Η ιδιότητα αυτή ανακαλύφθηκε το 1611 από τον αστρονόμο Johannes Kepler, ο οποίος επίσης,

³⁶Bradley, M. J., *The birth of mathematics: Ancient times to 1300*, NY:Chelsea House, New York, 2006, σ. 120.

³⁷Birch, F., «An In-depth Investigation of the Divine Ratio», *The Montana Mathematics Enthusiast*, Vol. 3, No.2, 2006, σ. 157 - 175.

³⁸Ακολουθία πραγματικών αριθμών ονομάζεται κάθε απεικόνιση του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Μια ακολουθία είναι καλώς ορισμένη αν γνωρίζουμε ποιος πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό. Συμβολικοί τρόποι που μας εξασφαλίζουν αυτό είναι οι εξής :

α) Να δίνεται ο n -οστός όρος της ακολουθίας συναρτήσει του n , έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε την τιμή του αντίστοιχου όρου.

β) Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορεί να ορισθεί μία ακολουθία είναι με τον αναδρομικό τύπο, δηλαδή να μας δίνουν τον πρώτο όρο της ακολουθίας και ένα νόμο μέσω του οποίου μπορεί να υπολογισθεί ο τυχαίος όρος της ακολουθίας από τον προηγούμενό(ή τους προηγούμενους) του. Τότε με επαγωγική μέθοδο μπορούμε να υπολογίσουμε τον κάθε όρο της ακολουθίας, γιατί ο πρώτος είναι γνωστός και με την υπόθεση ότι γνωρίζουμε τον όρο τάξης k μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο τάξης $k + 1$. Για παράδειγμα, δίνεται η ακολουθία με πρώτο όρο τον $a_1 = \frac{1}{2}$ και $a_{n+1} = 2a_n + 3$, με $n \in \mathbb{N}$. Τότε λέμε ότι η ακολουθία ορίζεται από αναδρομικό τύπο πρώτης τάξης. Αν γνωρίζουμε τους δυο πρώτους όρους κι έναν νόμο με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί ο τυχαίος όρος της ακολουθίας από τους δύο προηγούμενους του, τότε λέμε ότι η ακολουθία (a_n) ορίζεται από αναδρομικό τύπο δεύτερης τάξης, και με όμοιο τρόπο μπορεί να γενικευθεί σε αναδρομικό τύπο τρίτης, τέταρτης τάξης κ.ο.κ.

συνέδεσε τους αριθμούς Fibonacci με το φαινόμενο της δομής των φύλλων που παρατηρείται στη φύση. Αργότερα, τον δέκατο ένατο αιώνα, η ακολουθία των αριθμών αυτών, θα αποκαλούνταν Ακολουθία Fibonacci, από τον Γάλλο Μαθηματικό Eduard Lucas. Στην πραγματικότητα όμως εκφράστηκε πρώτα το 1634 με τη μορφή της παράστασης $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ από τον Γάλλο μαθηματικό Albert Girard.³⁹

Σύμφωνα με τα παραπάνω, δεδομένου ότι οι δύο πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι $F_1 = 1$ και $F_2 = 1$ τότε έχουμε $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 1 + 2 = 3$ κ.ο.κ. Έτσι, οι 20 πρώτοι όροι της ακολουθίας φαίνονται παρακάτω:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}	F_{17}	F_{18}	F_{19}	F_{20}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765

Ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας, όσο προχωρούμε σε πιο μεγάλους n , συγκλίνει στον αριθμό ϕ . Με άλλα λόγια, ο λόγος $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, όσο αυξάνεται το n , προσεγγίζει τη Χρυσή Τομή, όπως φαίνεται παρακάτω:

1/1	1
2/1	2
3/2	1.5
5/3	1,66666667
8/5	1,6
13/8	1,625
21/13	1,61538462
34/21	1,61904762
55/34	1,61764706
89/55	1,61797753
144/89	1,61797753
233/144	1,61805556
377/233	1,61802575
610/377	1,61803714

³⁹Livio, M., ό.π., σ. 98.

Αρχιτεκτονική και Μαθηματικά

Η σχέση Μαθηματικών και Αρχιτεκτονικής είναι άρρηκτα συνδεδεμένη από τους προϊστορικούς χρόνους. Η κατασκευή ενός κτίσματος προφανώς απαιτούσε κάποιου είδους σχεδιασμού και ιδέες οι οποίες σχετίζονται με την Γεωμετρία. Σταδιακά, οι άνθρωποι ανέπτυξαν ειδικές δεξιότητες για τις οποίες η αλληλεπίδραση των «πρώτο-Μαθηματικών» και της «πρώτο-Αρχιτεκτονικής» ήταν απαραίτητες.⁴⁰

Βασικές έννοιες τις οποίες χρησιμοποίησαν οι αρχιτέκτονες στο πέρασμα του χρόνου ήταν αυτές της συμμετρίας και των αναλογιών.⁴¹ Ο Ρωμαίος αρχιτέκτονας Βιτρούβιος υποστήριζε πως τρεις είναι οι προϋποθέσεις για ένα σωστό κτήριο. Αυτές ήταν η χρησιμότητα του, η σταθερότητα και η ομορφιά του.⁴² Ωστόσο, ο Βιτρούβιος στο έργο του «Δέκα βιβλία της Αρχιτεκτονικής», δεν κάνει άμεση αναφορά στα Μαθηματικά ως απαγωγικής επιστήμης. Δεν αναφέρεται πουθενά το όνομα του Θαλή ή του Ευκλείδη. Αυτό οδηγεί μελετητές να προτείνουν τον διαχωρισμό σε Μαθηματικά του Ευκλείδη (ή απαγωγικά Μαθηματικά) και σε Μαθηματικά του Βιτρούβιου (ή Μαθηματικά του τεχνίτη) χωρίς όμως πάντοτε να είναι ευδιάκριτο το πλαίσιο στο οποίο ανήκει ένα έργο.⁴³

Οι μελέτες διάφορων περιπτώσεων δείχνουν ότι η Χρυσή Τομή επηρεάζει την αρχιτεκτονική. Στην πραγματικότητα, η χρυσή αναλογία δεν αφορά μόνο στην εξίσωση της και τις μαθηματικές ιδιότητές της, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί με μεγάλη λεπτομέρεια αρχιτεκτονική σε διαφορετικές κλίμακες. Σε πολλές περιπτώσεις, οι αρχιτέκτονες θεωρούν πως η ομορφιά σε κάποιο σχέδιό τους ζητάει μία βάση μαθηματικής απόδειξης.⁴⁴

⁴⁰Nagy, D., «Architecture, mathematics, and a “symmetric link” between them», G. Darvas& D Nagy (επιμ.), *Symmetry: Art and Science*, International Symmetry Foundation, Vol.2, 2002, σ. 31.

⁴¹Sterk, H., *Geometry in architecture and building*, Faculteit Wiskunde en Informatica Technische Universiteit Eindhoven, 2005, σ. 1.

⁴²Gangwar, Ar. G., «Principles and Applications of Geometric Proportions in Architectural Design», *Journal of Civil Engineering and Environmental Technology*, Vol. 4, Issue 3, 2017, σ. 171-176.

⁴³ Nagy, D., ό.π. σ. 32.

⁴⁴Khoshnaw, D., Hawez, W., «How to Explore Golden Ratio in Architecture and Designing City», *International Journal of Engineering Research and Applications*, Vol. 6, Issue 8, (Part 4), 2016, σ. 1-7.

Γεωμετρία και Αρχιτεκτονική στην Αρχαία Ελλάδα

Η ανάπτυξη της πρακτικής και θεωρητικής γεωμετρίας από τους αρχαίους Έλληνες ήταν ένα σπουδαίο πολιτιστικό επίτευγμα, και αποδείχθηκε ορόσημο για την εξέλιξη της ελληνικής αρχιτεκτονικής. Η εξέλιξη της Γεωμετρίας στην Ελλάδα θα μπορούσε να χωριστεί σε τρεις περιόδους. Η πρώτη περίοδος είχε σκοπό να τονίσει τις εφαρμογές της Γεωμετρίας σε φιλοσοφικό και θρησκευτικό επίπεδο, με κύριους εκπροσώπους τους δύο προ-Σωκρατικούς φιλοσόφους, τον Θαλή τον Μιλήσιο και τον Αναξίμανδρο. Και οι δύο χρησιμοποίησαν γεωμετρικά μοντέλα προκειμένου να διατυπώσουν τις απόψεις τους για τον Κόσμο στο πρώτο μισό του 6^{ου} αιώνα π.Χ.

Η δεύτερη περίοδος έλαβε χώρα στην ελληνιστική Αλεξάνδρεια, όπου ο πιο σημαντικός θεματοφύλακας της Γεωμετρίας, ο Ευκλείδης, τον 3^ο αιώνα π.Χ. κατάφερε να συγκεντρώσει την μέχρι τότε υπάρχουσα γνώση γύρω από θέματα Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Δεν είναι άλλωστε τυχαίο ότι η βάση της γνώσης μέχρι και τις μέρες μας προέρχεται από το έργο του Ευκλείδη.

Η τρίτη περίοδος ανάπτυξης της Γεωμετρίας πραγματοποιήθηκε την ύστερη ελληνιστική περίοδο, όταν ο Αρχιμήδης από τις Συρακούσες και ο Απολλώνιος ήταν μεταξύ των γεωμετρών που συνέβαλλαν στην εξέλιξη της Γεωμετρίας. Αυτή η περίοδος ήταν επίσης αξιοσημείωτη για τις εξελίξεις στη μηχανική.⁴⁵ Οι εξελίξεις αυτές είχαν ήδη συμβεί από τους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους. Πρέπει να γίνει κατανοητό πως στην πραγματικότητα, οι Έλληνες δεν ήταν μακριά από τους Αιγύπτιους ή τους Βαβυλώνιους. Δεν είναι τυχαίο ότι ο Θαλής και ο Αναξίμανδρος ήταν από την Ιωνία καθώς και ο Πυθαγόρας καταγόταν από τη Σάμο, νησί στα παράλια της Ιωνίας. Επίσης, Έλληνες και Αιγύπτιοι επιστήμονες μελετούσαν από κοινού στην Αλεξάνδρεια. Ευκλείδης, Ερατοσθένης, Αρχιμήδης, Απολλώνιος, Ήρωνας, Πτολεμαίος και Διόφαντος είναι μερικοί από τους μαθηματικούς που υπήρξαν και μεγαλούργησαν στην Αίγυπτο.

Κατά την αρχαϊκή περίοδο οι κατασκευές ναών από τους Έλληνες γίνονταν εξ' ολοκλήρου από πέτρα και αυτό είναι φανερό σε μεγάλη κλίμακα στην περιοχή της Ιωνίας.⁴⁶ Προφανώς, υπήρξε σχέση μεταξύ της ελληνικής και αιγυπτιακής

⁴⁵Leonardis,R.,«The Use of Geometry by Ancient Greek Architects», Miles, M. (επιμ.), *A Companion to Greek Architecture*, John Wiley & Sons, Inc., 2016, σ. 92.

⁴⁶Leonardis, R., ό.π., σ. 93.

αρχιτεκτονικής από πέτρα όσο και οι σχέση μεταξύ αιγυπτιακής και ελληνικής γλυπτικής. Είναι αυτονόητο ότι μαζί με η μετάδοση και μεταφορά δεξιοτήτων και εργαλείων θα έλαβε χώρα και η μεταφορά μεθόδων και διαδικασιών. Έτσι, η Ελλάδα κατακλύζεται από «ανατολίζουσες» τεχνοτροπίες με αποτέλεσμα οι επιρροές αυτές να σηματοδέψουν τον ελληνικό πολιτισμό τόσο στην καθημερινότητα, όσο και σε διάφορες άλλες εκφάνσεις του.⁴⁷

Η χρήση της Γεωμετρίας στις κατασκευές περιοριζόταν σε τρία βασικά στάδια εφαρμογής. Πρώτον, το αποκαλούμενο «αποτύπωμα». Θα έπρεπε ο αρχιτέκτονας να γνωρίζει εκ των προτέρων τις σχέσεις και τις αναλογίες μεταξύ κρηπιδώματος, στυλοβάτη καθώς και άλλα βασικά μέρη της κατασκευής. Οι αναλογίες και γενικότερα οι αριθμοί που θα εμφανίζονταν σε ένα ναό θα μπορούσαν να έχουν φιλοσοφικούς ή θρησκευτικούς συμβολισμούς.⁴⁸ Σε κάθε περίπτωση όμως οι αναλογίες ήταν τόσο απαραίτητες ώστε όπως αναφέρει ο Βιτρούβιος, «χωρίς τις αναλογίες δεν μπορούν να υπάρξουν αρχές και κανόνες αρχιτεκτονικού σχεδιασμού».

Στο δεύτερο στάδιο, όταν ο αρχιτέκτονας κατέληγε στο μέγεθος του ναού, σχεδίαζε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς το συμφωνημένο πλάτος του ναού. Στη συνέχεια, κατασκεύαζε τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το μισό του αρχικού, σύμφωνα με τη μέθοδο που παρουσιάζει ο Πλάτωνας στον διάλογό του με τον Μένωνα.⁴⁹ Σε αυτό το σημείο, για να βρεθεί το μήκος του κρηπιδώματος, σε πολλές περιπτώσεις ήταν επιβεβλημένη η χρήση της χρυσής τομής.⁵⁰

Τέλος, σειρά έπαιρναν το ύψος του ναού και τα δευτερεύοντα στοιχεία. Έπρεπε να βρεθεί το συνολικό ύψος του ναού καθώς και οι διαστάσεις των υπόλοιπων στοιχείων του. Όλες οι μετρήσεις και μελέτες γίνονταν με συνεχείς διαιρέσεις του αρχικού τετραγώνου.⁵¹ Έτσι, δινόταν στον όλο αρχιτεκτονικό σχεδιασμό μία συνέχεια. Ακόμη και οι λεπτομέρειες που εισέρχονταν αργότερα για την ολοκλήρωση του έργου, έπρεπε να ικανοποιούν τις αναλογίες του αρχικού τετραγώνου. Ολόκληρος ο ναός ήταν αποτέλεσμα συνεχούς διαδικασίας και όχι ξεχωριστών κατασκευών.

⁴⁷Πλάντζος, Δ., *Ελληνική Τέχνη και Αρχαιολογία 1100 – 30 π.Χ.*, ΚΑΠΟΝ, 2013, σ. 60.

⁴⁸Kingsley, P., *Ancient Philosophy, Mystery, and Magic: Empedocles and the Pythagorean Tradition*. Oxford, 1995, σ. 175.

⁴⁹Heath, L. T., *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, τ.1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης – Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001, σ. 370.

⁵⁰Leonardis, R., ό.π., σ. 94.

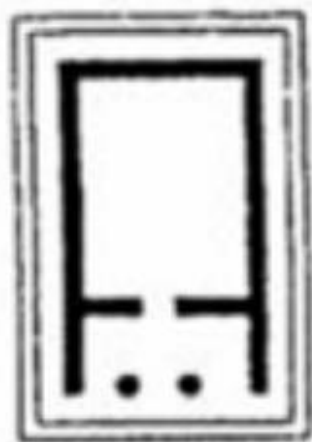
⁵¹Leonardis, R., ό.π., σ. 94.

Τα Είδη και η Δομή των Αρχαιοελληνικών Ναών

Η αρχιτεκτονική των αρχαίων ναών ακολουθεί συγκεκριμένους τύπους και ρυθμούς αλλά υπάρχει και αντιστοιχία ανάμεσα στο μέγεθος και τον τύπο του ναού. Ο εσωτερικός χώρος ή σηκός είναι κατά κανόνα ορθογώνιος. Οι κίονες είναι αυτοί που στηρίζουν τη στέγη μέσω ενός συστήματος κύριων δοκών. Στους μικρούς ναούς αρκούν οι τοίχοι προκειμένου να συγκρατήσουν τη στέγη αλλά όσο το μέγεθος ενός ναού μεγαλώνει τόσο αυξάνεται και το πλήθος των κιόνων που είναι ικανοί να τον συγκρατήσουν. Ο αριθμός των κιόνων ποικίλει λοιπόν ανάλογα με το μέγεθος του ναού και πολλές φορές χρειάζεται και διπλή σειρά κιόνων ώστε να συγκρατήσουν τη στέγη.⁵²

Ο Βιτρούβιος, στο έργο του «The Ten Books of Architecture», κατηγοριοποιεί του ναούς σε ναούς ένα παραστάσι, πρόστυλους, αμφιπρόστυλους, περίπτερους, ψευδοπερίπτερους, δίπτερους και υπαίθρους.

Συγκεκριμένα, ναός εν παραστάσι χαρακτηρίζεται εκείνος όπου οι δύο μακροί τοίχοι του σηκού καθώς καταλήγουν στις στενές πλευρές σχηματίζουν δύο παραστάδες, ανάμεσα στις οποίες παρεμβάλλονται δύο κίονες.



Εικόνα 1: Ναός εν παραστάσι

Ο πρόστυλος ναός είναι ένας εν παραστάσι ναός, όταν σε αυτόν αντικατασταθούν οι δύο πλευρικές παραστάδες με κίονες. Δηλαδή, μπροστά από τον σηκό έχουμε μια απλή σειρά κιόνων.

⁵²Κορρές, Μ., Μπούρας, Χ., ό.π., σ. 10



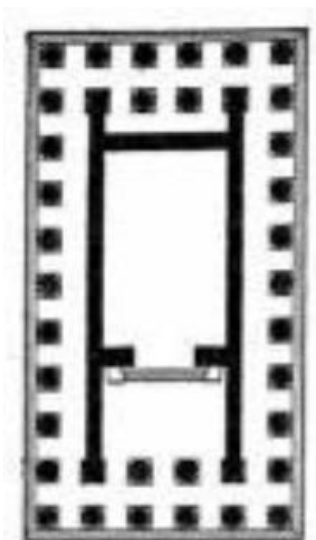
Εικόνα 2: Πρόστυλος ναός

Αμφιπρόστυλος ναός είναι εκείνος όπου και οι δύο στενές πλευρές του είναι διαμορφωμένες όπως στον πρόστυλο καθώς επίσης στην πίσω πλευρά του έχει κίονες και αέτωμα.



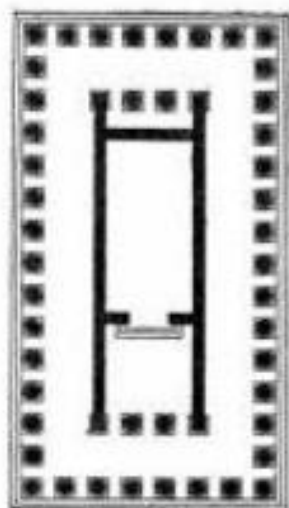
Εικόνα 3: Αμφιπρόστυλος ναός

Περίπτερος ναός είναι ένας ναός εν παραστάσι όταν προστεθεί περιμετρικά κιονοστοιχία, δηλαδή πτερό. Επίσης, έχει έξι κίονες μπροστά και έξι στο πίσω μέρος, με έντεκα σε κάθε πλευρά, συμπεριλαμβανομένου του γωνιακού κίονα.



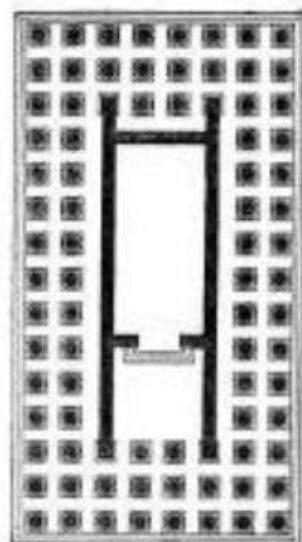
Εικόνα 4: Περίπτερος ναός

Ψευδοπερίπτερος χαρακτηρίζεται εκείνος ο ναός κατασκευασμένος ώστε στο μπροστινό και στο πίσω μέρος του να υπάρχουν σε κάθε περίπτωση οκτώ κίονες, με δεκαπέντε σε καθεμία πλαϊνή πλευρά, συμπεριλαμβανομένων των γωνιακών κίωνων. Οι τοίχοι του σηκού στο μπροστινό και πίσω μέρος του πρέπει να είναι ακριβώς πάνω από τους τέσσερις μεσαίους κίονες.



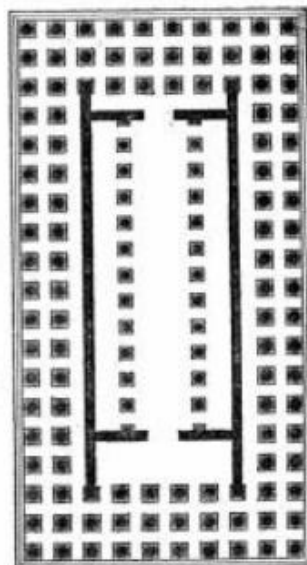
Εικόνα 5: Ψευδοπερίπτερος ναός

Δίπτερος ναός είναι εκείνος στον οποίο είναι κατασκευασμένη περιμετρικά διπλή κιονοστοιχία.



Εικόνα 6: Δίπτερος ναός

Ύπαιθρος ναός είναι αυτός με δέκα κίονες τόσο στο μπροστινό όσο και το πίσω μέρος του. Τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του είναι ίδια με του δίπτερο ναού αλλά το κεντρικό του τμήμα είναι ανοιχτό, χωρίς στέγη.



Εικόνα 7: Υπαίθριος ναός

Ιστορικό Πλαίσιο του Παρθενώνα

Ο Παρθενώνας είναι ένας ναός στην Ακρόπολη της Αθήνας, αφιερωμένος στη θεά Αθηνά, προστάτιδα της πόλης των Αθηνών. Ο ναός έχει μεγάλες διαστάσεις αλλά δεν είναι ο μεγαλύτερος ελληνικός ναός. Είναι ωστόσο κατασκευασμένος εξ' ολοκλήρου από μάρμαρο, αντί για τον πιο συνηθισμένο ασβεστόλιθο με τον οποίο κατασκευάστηκαν σημαντικοί ναοί, όπως των Δελφών και της Ολυμπίας.⁵³ Η κατασκευή ξεκίνησε το 447 π.Χ. όταν η Αθηναϊκή Ηγεμονία βρισκόταν στο αποκορύφωμά της. Ολοκληρώθηκε το 438 π.Χ., αν και η διακόσμηση του κτηρίου συνεχίστηκε μέχρι το 432 π.Χ. Είναι το σημαντικότερο σωζόμενο κτίριο της Κλασικής Ελλάδας, που θεωρείται γενικά το αποκορύφωμα του δωρικού ρυθμού αν και δεν του λείπουν στοιχεία ιωνικού ρυθμού τόσο στη ζωοφόρο του⁵⁴ όσο και στους κίονες του δυτικού διαμερίσματος παίζοντας κυρίαρχο ρόλο στην διακόσμηση και ζωογόνησή του.⁵⁵ Ο Παρθενώνας θεωρείται ένα διαρκές σύμβολο της αρχαίας Ελλάδας, της αθηναϊκής δημοκρατίας, του δυτικού πολιτισμού και ένα από τα μεγαλύτερα πολιτιστικά μνημεία του κόσμου.

Ο Περικλείος Παρθενών, ο οποίος έχει διασωθεί μέχρι τις μέρες μας, διαδέχθηκε άλλους ναούς που έστεκαν στην ίδια περίπου θέση. Το 488 ή μετά το 479 π.Χ., χρησιμοποιώντας τα λάφυρα από τη νίκη στη μάχη του Μαραθώνα (490 π.Χ.), άρχισε να κατασκευάζεται ο αρχαιότερος Παρθενών ο οποίος όμως έμεινε ημιτελής λόγω της δεύτερης εισβολής των Περσών υπό τον Μαρδόνιο κατά την οποία τα ιερά της Ακροπόλεως παραδόθηκαν στις φλόγες και κατεδαφίστηκαν.⁵⁶

Ο Περικλείος Παρθενών διαδέχθηκε έναν προηγούμενο ναό, το μαρμάρινο Προ-Παρθενώνα, που άρχισε να κτίζεται μετά τη νίκη στο Μαραθώνα, περίπου το 490 π.Χ., αλλά δεν ολοκληρώθηκε ποτέ γιατί καταστράφηκε το 480 π.Χ. από τους

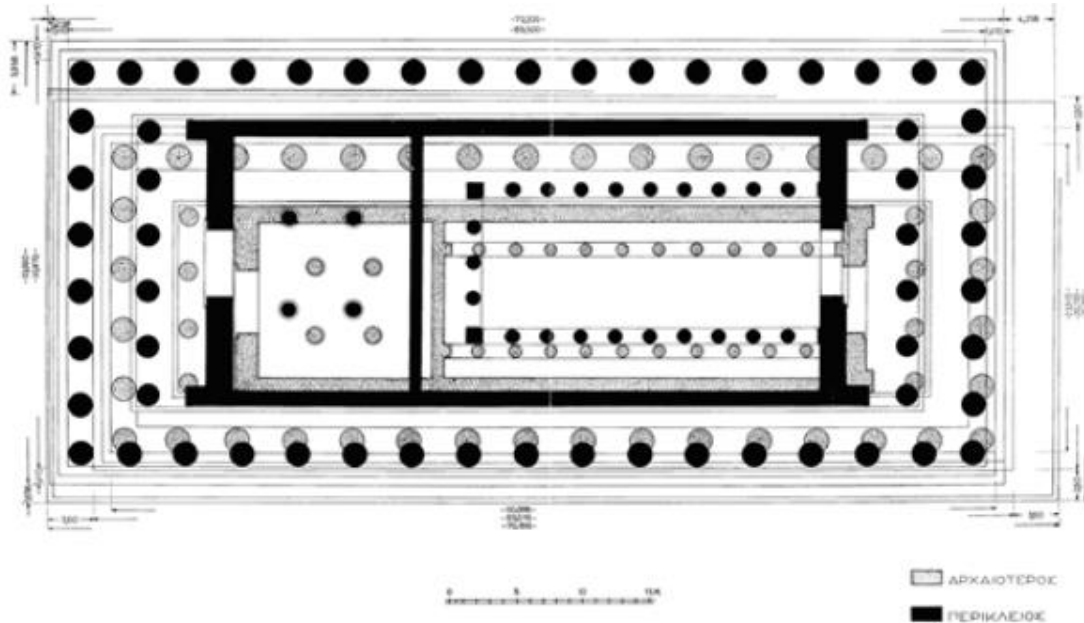
⁵³ Camp, M. J., *Οι αρχαιότητες της Αθήνας και της Αττικής*, Ινστιτούτο του Βιβλίου – Καρδαμίτσα, Αθήνα, 2009, σ. 107.

⁵⁴ Barletta, A. B. D., «In Defense of the Ionic Frieze of the Parthenon», *American Journal of Archaeology*, 2009, Vol. 113, No. 4, σ. 547-568

⁵⁵ Κορρές, Μ., Μπούρας, Χ., *Μελέτη αποκαταστάσεως του Παρθενώνος*, Υπουργείο Πολιτισμού και Επιστημών – Επιτροπή Συντηρήσεως Μνημείων Ακροπόλεως, Αθήνα, 1983, σ. 24.

⁵⁶ Μπένγκτσον, Χ., *Ιστορία της Αρχαίας Ελλάδος: από τις απαρχές μέχρι τη Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία*, Μέλισσα, 1991, σ.184

Πέρσες. Αυτός με τη σειρά του είχε οικοδομηθεί στη θέση παλαιότερου ναού, του πρωταρχικού Παρθενώνα, που κτίστηκε γύρω στο 570 π.Χ.⁵⁷



Εικόνα 8: Κάτοψη του Περικλείου Παρθενώνα συγκριτικά με τον αρχαιότερο

Ο Περικλής, έχοντας τερματίσει το 448 π.Χ με ειρήνη τον μακροχρόνιο πόλεμο με τους Πέρσες και εξασφαλίζοντας χρήματα από τους συμμάχους, αποφάσισε να μην συνεχιστεί η κατασκευή του ναού με βάση τα παλιά σχέδια, αλλά να ανεγερθεί ένας καινούργιος, μεγαλύτερος και εκσυγχρονισμένος ναός, αφιερωμένος στην Θεά Αθηνά ο οποίος θα αποτελούσε δείγμα της ισχύος της πόλης των Αθηνών αλλά και τρόπο εξευγενισμού των θεών.⁵⁸ Για την εκτέλεση του έργου αυτού, ο Περικλής επέλεξε τον επιφανέστερο των συγχρόνων αρχιτεκτόνων, τον Ικτίνο ο οποίος εκείνη την εποχή είχε εύνοια καθώς είχε αναλάβει το ναό της Αθηνάς Νίκης και ήταν υπεύθυνος για την κατασκευή των Μακρών Τειχών στον Πειραιά.⁵⁹ Συνεργάτης του ορίστηκε ο διάσημος γλύπτης και φίλος του Περικλή, Φειδίας. Ωστόσο, δεν συμφωνούν όλες οι αρχαίες πηγές για το αν ο Ικτίνος ήταν αποκλειστικά υπεύθυνος για το έργο. Για παράδειγμα, ο Πλούταρχος θεωρεί τους Ικτίνο και Καλλικράτη ως αρχιτέκτονες του

⁵⁷Υπουργείο Αθλητισμού και Πολιτισμού, ανακτήθηκε από <http://odysseus.culture.gr>

⁵⁸Bury, J. B., Meiggs, R., *Ιστορία της Αρχαίας Ελλάδας*, Ινστιτούτο βιβλίου – Α. Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1975, σ. 348.

⁵⁹ Gruben, G., *Ιερά και Ναοί των Αρχαίων Ελλήνων*, Ινστιτούτο του Βιβλίου – Καρδαμίτσα, Αθήνα, 2015, σ. 183.

Παρθενώνα, ενώ ο Βιτρούβιος σχολιάζει ότι ο Ικτίνος και ο Καρπίος έγραψαν τη μελέτη για τον Παρθενώνα. Παρά τις διαφορές ,από τους σύγχρονους μελετητές θεωρείται ότι ο Ικτίνος ηγήθηκε του έργου του Παρθενώνα.⁶⁰ Ο ρόλος του Φειδία ήταν ως γενικός επόπτης όλων των εργασιών που εκτελούνταν στο ναό, δεδομένου ότι εκτός από τις γλυπτικές του ικανότητες, ο Φειδίας ήταν γνωστός και για τις αρχιτεκτονικές του γνώσεις.

Το καθαυτό όμως οικοδομικό έργο ολοκληρώθηκε το 438 π.Χ, μόλις εννέα έτη μετά την έναρξη των εργασιών. Το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε μεταξύ του 438 - 432 π.Χ ήταν ο χρόνος που απαιτήθηκε για την τοποθέτηση των γλυπτών μέσα στα αετώματα. Λαμβάνοντας υπόψη το μέγεθος και την εξαιρετική ποιότητα κατασκευής του μνημείου, ο Παρθενών αποτελεί θαύμα οικοδομικής ταχύτητας.

Η ανέγερση του ναού ήταν μέρος ενός εκτεταμένου προγράμματος ανοικοδόμησης και εξωραϊσμού της ακρόπολης των Αθηνών με πρωτοβουλία του Περικλή.⁶¹ Η απόφαση αυτή πάρθηκε έπειτα από τη στρατιωτική νίκη κατά των Περσών. Ο Περικλής χρησιμοποίησε τις εισφορές που κατέβαλλαν οι ελληνικές πόλεις-κράτη στο ταμείο της Δηλιακής Συμμαχίας. Το 454 π.Χ., ο Περικλής μετέφερε το ταμείο από το ιερό νησί της Δήλου, στην Αθήνα. Στην υλοποίηση αυτού του μεγαλεπήβολου κατασκευαστικού προγράμματος συμμετείχαν κάποιοι από τους πιο γνωστούς αρχιτέκτονες και γλύπτες της εποχής, ενώ χρησιμοποιήθηκε μεγάλος αριθμός εργατών και τεράστιες ποσότητες πρώτων υλών και πόρων, καθώς και σημαντικής ποσότητα χρυσού. Έτσι, το εγχείρημα αυτό αποτελούσε μια πράξη επιδεικτικής κατανάλωσης, με σαφείς πολιτικές σκοπιμότητες και συμβολισμό, που σχετίζονταν με το γόητρο της πολιτικής ηγεμονίας της Αθήνας στον ελληνικό χώρο.⁶²

Η κατασκευή του Παρθενώνα πρέπει να ήταν έργο κάποιας επιτροπής. Ουσιαστικά όμως ήταν το έργο ολόκληρου του Αθηναϊκού κόσμου όχι μόνο επειδή εκατοντάδες από αυτούς είχαν βοηθήσει στην οικοδόμησή του αλλά επειδή ο Δήμος ασκούσε έλεγχο σε όλα τα στάδια της κατασκευής.⁶³ Θα μπορούσε έτσι κανείς να συμφωνήσει

⁶⁰Barletta, B.A., *Architecture and Architects. in the Parthenon: From Antiquity to the Present*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, σ. 89.

⁶¹Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, Πεντάτομη Έκδοση, τ.1, σ. 123.

⁶²Χαμηλάκης, Γ., *Το Έθνος και τα ερείπια του*, Εκδόσεις του Εικοστού Πρώτου, Αθήνα, 2012, σ. 276.

⁶³Wycherley, R. E., *The Stones of Athens*, Princeton University Press, Princeton, 1992, σ. 113.

πως ο ρόλος του Παρθενώνα ήταν και η ανάδειξη κρυμμένων ταλέντων ανάμεσα στους ανθρώπους, σε θέματα σχεδιασμού και τεχνικά ζητήματα.⁶⁴

Κατά τη ρωμαϊκή περίοδο, ο Παρθενώνας έχασε το αρχικό του νόημα, αλλά εξακολούθησε να βρίσκεται στο επίκεντρο της προσοχής για τους πολιτικούς ηγέτες της περιόδου. Κατά τον 5ο αιώνα, υπέστη καταστροφές και το μνημείο μετατράπηκε σε ορθόδοξη εκκλησία. Αφιερώθηκε στην Παρθένο Μαρία και επί πολλούς αιώνες ήταν γνωστό ως Παναγία Αθηνιώτισσα. Τον 12ο αιώνα, ο Παρθενώνας ήταν ο μητροπολιτικός ναός όπου ιερούργουσε ο μητροπολίτης Αθηνών και λόγιος Μιχαήλ Χωνιάτης.⁶⁵

Τον επόμενο αιώνα, έπειτα από την κατάκτηση της Ελληνικής χερσονήσου από τις στρατιές της Δ' Σταυροφορίας, ο Παρθενώνας έγινε ρωμαιοκαθολική εκκλησία και ο καθεδρικός ναός της φραγκοκρατούμενης Αθήνας. Τον 15ο αιώνα, ύστερα από την κατάληψη της πόλης από τους Οθωμανούς, μετατράπηκε σε τζαμί, στο οποίο μάλιστα προστέθηκε και ένας μιναρές. Η μεγαλύτερη καταστροφή επήλθε το 1687, όταν κατά τον πόλεμο Βενετών και Οθωμανών, ο Βενετός αρχιστράτηγος Μοροζίνι, πολιορκώντας τους Οθωμανούς στην Ακρόπολη, βομβάρδιζε το μνημείο από τους γύρω λόφους. Περιγράφοντας αυτό το γεγονός, ο στρατηγός Κένιγκσμαρκ, πιστός του Μοροζίνι, έγραψε: «Πόσο συνταράχθηκε η Εξοχότης του με την καταστροφή του όμορφου ναού που υπάρχει εδώ και τρεις χιλιάδες χρόνια!»⁶⁶

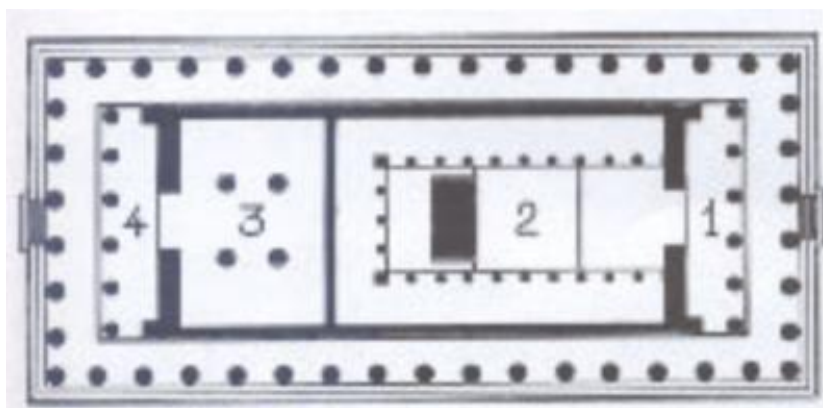
Η Αρχιτεκτονική του Παρθενώνα

Με βάση τα παραπάνω, μπορεί να γίνει η διαπίστωση ότι ο Περικλείος Παρθενώνας, όπως και ο αρχαιότερος, είναι περίπτερος ναός. Ο σηκός του Παρθενώνα είχε τη μορφή αμφιπρόστυλου ναού, κατά τα ιωνικά πρότυπα, έχοντας σε καθεμία από τις στενές πλευρές του ορθογώνιου σηκού μια ανοιχτή στοά. Οι μέγιστες διαστάσεις του ναού είναι μήκος 72.32 μ., πλάτος 33.69 μ. και ύψος 19.80 μ. Ο ναός του Παρθενώνα χωρίζεται σε τέσσερα βασικά μέρη, τον πρόναο (1), το σηκό (2), τον οπισθόδρομο (3) και τον οπισθόναο (4).

⁶⁴Nardo, D., *The Parthenon of Ancient Greece*, ReferencePoint Press, San Diego, 2014, σ. 37.

⁶⁵Χαμηλάκης, Γ., *ό.π.*, σ. 278.

⁶⁶Livio, M., *ό.π.*, σ. 109.



Εικόνα 9: Κάτοψη του Παρθενώνα

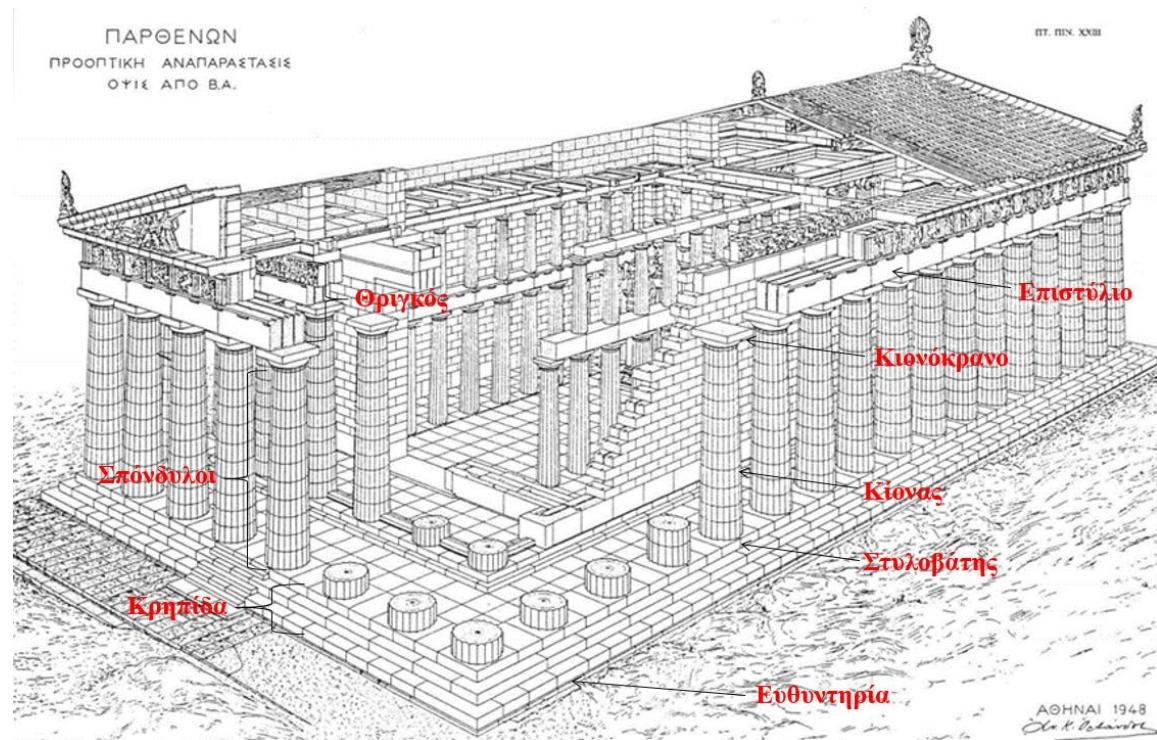
Τα καθ' ύψος βασικά χαρακτηριστικά του Παρθενώνα είναι η κρηπίδα, το περιστύλιο και ο θριγκός. Κρηπίδα είναι η «οριζόντια» κλιμακωτή βάση του ναού. Περιστύλιο ονομάζεται το σύνολο των κιόνων και τέλος, ο θριγκός είναι το τμήμα της ανωδομής του ναού που βρίσκεται ακριβώς επάνω από τους τοίχους και τους κίονες. Ο θριγκός αποτελείται από το επιστύλιο, το διάζωμα, δηλαδή τις μετόπες και τα τρίγλυφα ή/και την ζωοφόρο και το γείσο.

Η κρηπίδα είναι η κατασκευασμένη εξωτερικά από μάρμαρο και εσωτερικά από υλικό του αρχαιότερου στερεοβάτη, κλιμακωτή βάση του ναού. Αποτελείται από μια κατώτατη χαμηλή στρώση, την ευθυνητήρια και από τρεις ανώτερες στρώσεις τους αναβαθμούς. Ο ανώτατος αναβαθμός χρησιμεύει στη στήριξη των κιόνων του πτερού ή περιστασης και ονομάζεται στυλοβάτης.

Πάνω σε ένα ισχυρό συμπαγές κατακεκλιμένο στοιχείο, την τρίβαθμη κρηπίδα, στέκει ή ρυθμική εξωτερική κιονοστοιχία, ή περίσταση, με 46 κίονες ύψους 10,43 μ. μέτρων, πού μαζί με τον ισχυρό θριγκό της, δηλαδή το σύνθετο οριζόντιο στοιχείο που εκτείνεται επάνω από τούς κίονες, περιβάλλει σε σχετικά μικρή απόσταση τον μεγάλο σηκό του ναού. Τα διαστήματα μεταξύ των κιόνων είναι λίγο μεγαλύτερα από το πάχος τους.

Το τελευταίο κατακεκλιμένο στοιχείο πού αμέσως επάνω από τον θριγκό επιστέφει τον ναό, είναι το οριζόντιο γείσο. Το σύνολο στεγάζει ή μεγάλη δίκλινής στέγη, πού στις μακρές πλευρές τερματίζει στο οριζόντιο γείσο, ενώ στις προσόψεις σχηματίζονται αετώματα. Το βάθος του αετώματος κλείνεται με κατακόρυφο

τοίχωμα, το τύμπανο. Το αέτωμα έχει ως δάπεδο την επάνω επιφάνεια του οριζοντίου γείσου και ουρανό το ισοσκελές κεκλιμένο ή καταέτιο γείσο (δηλαδή την προεξοχή της στέγης επάνω από το τύμπανο). Μέγιστης σημασίας στοιχείο είναι τα γλυπτά που είναι τοποθετημένα στο επάνω μέρος του θριγκού, οι λεγόμενες μετόπες αλλά και στον χώρο των αετωμάτων.



Εικόνα 10: Προοπτική αναπαράσταση του Παρθενώνα από Βορειοανατολικά με μερικά από τα καθ' ύψος χαρακτηριστικά του.

Εκλεπτύνσεις και Οπτικές Πλάνες στον Παρθενώνα

Με τη συγγραφή των «Οπτικών» ο Ευκλείδης δεν κοινοποιούσε γνώσεις που δεν ήταν ήδη γνωστές στους συγχρόνους του, όπως και η συντριπτική πλειοψηφία των γνώσεων που συστηματοποίησε. Όλοι γνώριζαν ότι η αίσθηση της όρασης εξαπατά και ότι μια οπτική εντύπωση μπορεί να απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Οι αρχιτέκτονες του Παρθενώνα είχαν προσδώσει στους κίονες του και όχι μόνο, μια ελαφρά καμπυλότητα, πολύ πριν εμφανιστούν τα Οπτικά του Ευκλείδη.

Σύμφωνα με τον αρχαιολόγο, J. Coulton, οι αρχιτέκτονες χρησιμοποίησαν ένα ή περισσότερα συστήματα μέτρησης στο σχεδιασμό και την κατασκευή ναών. Την

αριθμητική, τη γεωμετρία και την οπτική.⁶⁷ Και από την σκοπιά της οπτικής, το επιτευγμάτων αρχιτεκτόνων του οικοδομήματος ήταν μοναδικό. Είχαν τη γνώση της ύπαρξης των πλανών κάτι το οποίο τους οδήγησε στην πρόβλεψη και τη διόρθωσή τους. Στην πραγματικότητα, γνώριζαν πως ο ανθρώπινος οφθαλμός λειτουργεί παραλλάσσοντας την τρισδιάστατη πραγματικότητα με καθόλου καλαίσθητα αποτελέσματα. Όπως θα δούμε, οι αρχιτέκτονες εστίασαν σε συγκεκριμένα τμήματα του οικοδομήματος και προσάρμοσαν τις αρχιτεκτονικές τους επιλογές με βάση τη φυσιολογία του ανθρώπινου ματιού, ώστε να επιτύχουν το κάλλος και την αρμονία.

Η εξισορρόπηση των οπτικών ψευδαισθήσεων έγινε με μια σειρά διαδικασιών που στην αρχιτεκτονική καλούνται «εκλεπτύνσεις» ή «διορθώσεις» (refinements). Οι εκλεπτύνσεις συνίστανται σε επεμβάσεις πάνω στα αρχιτεκτονικά μέρη με στόχο τη διόρθωση ανεπιθύμητων οπτικών ψευδαισθήσεων αλλά και τη δημιουργία αντικειμένων που δεν θα περιορίζονται στη φυσική τους υλική στατικότητα, αλλά θα έχουν παλμό και ζωντάνια, πλαστικότητα και «κίνηση». Γι' αυτό και ο Παρθενώνας δεν παρουσιάζει ευθείες γραμμές αλλά καμπύλες και, παρά τη φαινόμενη αρμονία που κυριαρχεί σε κάθε του σπιθαμή, παρουσιάζει ασυμμετρίες.⁶⁸ Αυτές εκτείνονται από την κρηπίδα μέχρι το πλάτος των κιονόκρανων και από τις διαστάσεις του σηκού μέχρι τις αποστάσεις μεταξύ των κιόνων. Ο πρώτος όμως που μελέτησε το ζήτημα, δηλαδή τις ψευδαισθήσεις και τις διορθώσεις επ' αυτών ήταν ο Βιτρούβιος, τον 1ο μ.Χ αιώνα στο έργο του «Περί Αρχιτεκτονικής».⁶⁹

Ο στυλοβάτης είναι το πρώτο τμήμα που παρουσιάζει απουσία ευθείας γραμμής· πρόκειται στην πραγματικότητα για μια καμπύλη σύνθεση. Περιλαμβάνει τρεις αναβαθμούς οι οποίοι είναι επίτηδες ανισοϋψείς, ώστε να δημιουργούν μια ελαφρά καμπύλωση προς τα άνω, μια κύρτωση. Συγκεκριμένα, η κρηπίδα παρουσιάζει στη μακριά πλευρά μια κύρτωση 0.11 μ. ενώ στη στενή παρουσιάζει κύρτωση 0.06 μ.⁷⁰ Πρόκειται για μια ανεπαίσθητη αλλά ζωτικής παρέμβασης των αρχιτεκτόνων, διότι, αν ο στυλοβάτης ήταν ευθύς, χωρίς ίχνος καμπυλότητας, το ανθρώπινο μάτι θα

⁶⁷Lewis, C. D., «Revealing the Parthenon's logos optikos», *Design and Nature*, CA Brebbia, L Sucharov & P. Pascola (επιμ.), Southampton, 2002, σ. 47.

⁶⁸Κορρές, Μ., Μπούρας, Χ., ό.π., σ. 15.

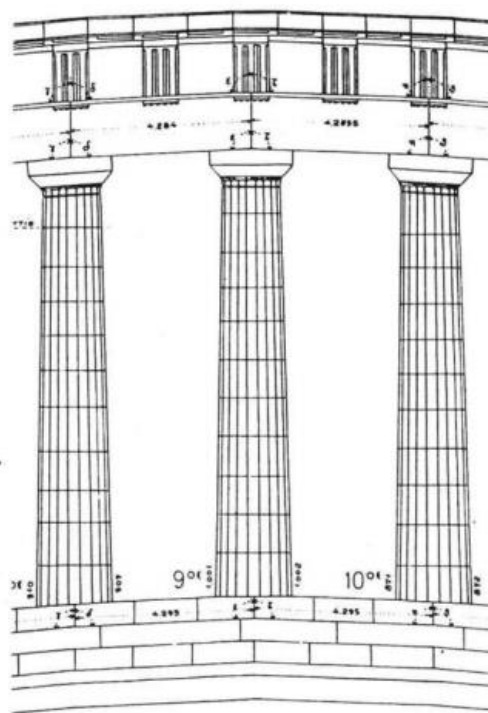
⁶⁹Miles, M., «Appearance and Essence. Refinements of Classical Architecture: Curvature by Lothar Haselberger», *Journal of the Society of Architectural Historians*, Vol. 60, No. 1, 2001, σ. 84.

⁷⁰Ζαμπάς, Κ., *Οι εκλεπτύνσεις των κιόνων του Παρθενώνας*, Υπουργείο Πολιτισμού – Επιτροπή Συντηρήσεως Μνημείων Ακροπόλεως, Αθήνα, 2002, σ. 53.

This technical drawing shows the floor plan of the Temple of Isis at Philae. It features a large outer rectangular enclosure and a smaller inner rectangular enclosure, both surrounded by columns. The drawing includes numerous dimension lines and numerical values indicating the size and spacing of the structures. Key dimensions include 6.98, 3.70, 3.44, 6.15, 6.64, 3.60, 3.65, 6.60, 3.61, 3.63, 3.65, 3.67, 3.69, 3.71, 3.73, 3.75, 3.77, 3.79, 3.81, 3.83, 3.85, 3.87, 3.89, 3.91, 3.93, 3.95, 3.97, 3.99, 4.01, 4.03, 4.05, 4.07, 4.09, 4.11, 4.13, 4.15, 4.17, 4.19, 4.21, 4.23, 4.25, 4.27, 4.29, 4.31, 4.33, 4.35, 4.37, 4.39, 4.41, 4.43, 4.45, 4.47, 4.49, 4.51, 4.53, 4.55, 4.57, 4.59, 4.61, 4.63, 4.65, 4.67, 4.69, 4.71, 4.73, 4.75, 4.77, 4.79, 4.81, 4.83, 4.85, 4.87, 4.89, 4.91, 4.93, 4.95, 4.97, 4.99, 5.01, 5.03, 5.05, 5.07, 5.09, 5.11, 5.13, 5.15, 5.17, 5.19, 5.21, 5.23, 5.25, 5.27, 5.29, 5.31, 5.33, 5.35, 5.37, 5.39, 5.41, 5.43, 5.45, 5.47, 5.49, 5.51, 5.53, 5.55, 5.57, 5.59, 5.61, 5.63, 5.65, 5.67, 5.69, 5.71, 5.73, 5.75, 5.77, 5.79, 5.81, 5.83, 5.85, 5.87, 5.89, 5.91, 5.93, 5.95, 5.97, 5.99, 6.01, 6.03, 6.05, 6.07, 6.09, 6.11, 6.13, 6.15, 6.17, 6.19, 6.21, 6.23, 6.25, 6.27, 6.29, 6.31, 6.33, 6.35, 6.37, 6.39, 6.41, 6.43, 6.45, 6.47, 6.49, 6.51, 6.53, 6.55, 6.57, 6.59, 6.61, 6.63, 6.65, 6.67, 6.69, 6.71, 6.73, 6.75, 6.77, 6.79, 6.81, 6.83, 6.85, 6.87, 6.89, 6.91, 6.93, 6.95, 6.97, 6.99, 7.01, 7.03, 7.05, 7.07, 7.09, 7.11, 7.13, 7.15, 7.17, 7.19, 7.21, 7.23, 7.25, 7.27, 7.29, 7.31, 7.33, 7.35, 7.37, 7.39, 7.41, 7.43, 7.45, 7.47, 7.49, 7.51, 7.53, 7.55, 7.57, 7.59, 7.61, 7.63, 7.65, 7.67, 7.69, 7.71, 7.73, 7.75, 7.77, 7.79, 7.81, 7.83, 7.85, 7.87, 7.89, 7.91, 7.93, 7.95, 7.97, 7.99, 8.01, 8.03, 8.05, 8.07, 8.09, 8.11, 8.13, 8.15, 8.17, 8.19, 8.21, 8.23, 8.25, 8.27, 8.29, 8.31, 8.33, 8.35, 8.37, 8.39, 8.41, 8.43, 8.45, 8.47, 8.49, 8.51, 8.53, 8.55, 8.57, 8.59, 8.61, 8.63, 8.65, 8.67, 8.69, 8.71, 8.73, 8.75, 8.77, 8.79, 8.81, 8.83, 8.85, 8.87, 8.89, 8.91, 8.93, 8.95, 8.97, 8.99, 9.01, 9.03, 9.05, 9.07, 9.09, 9.11, 9.13, 9.15, 9.17, 9.19, 9.21, 9.23, 9.25, 9.27, 9.29, 9.31, 9.33, 9.35, 9.37, 9.39, 9.41, 9.43, 9.45, 9.47, 9.49, 9.51, 9.53, 9.55, 9.57, 9.59, 9.61, 9.63, 9.65, 9.67, 9.69, 9.71, 9.73, 9.75, 9.77, 9.79, 9.81, 9.83, 9.85, 9.87, 9.89, 9.91, 9.93, 9.95, 9.97, 9.99, 10.01, 10.03, 10.05, 10.07, 10.09, 10.11, 10.13, 10.15, 10.17, 10.19, 10.21, 10.23, 10.25, 10.27, 10.29, 10.31, 10.33, 10.35, 10.37, 10.39, 10.41, 10.43, 10.45, 10.47, 10.49, 10.51, 10.53, 10.55, 10.57, 10.59, 10.61, 10.63, 10.65, 10.67, 10.69, 10.71, 10.73, 10.75, 10.77, 10.79, 10.81, 10.83, 10.85, 10.87, 10.89, 10.91, 10.93, 10.95, 10.97, 10.99, 11.01, 11.03, 11.05, 11.07, 11.09, 11.11, 11.13, 11.15, 11.17, 11.19, 11.21, 11.23, 11.25, 11.27, 11.29, 11.31, 11.33, 11.35, 11.37, 11.39, 11.41, 11.43, 11.45, 11.47, 11.49, 11.51, 11.53, 11.55, 11.57, 11.59, 11.61, 11.63, 11.65, 11.67, 11.69, 11.71, 11.73, 11.75, 11.77, 11.79, 11.81, 11.83, 11.85, 11.87, 11.89, 11.91, 11.93, 11.95, 11.97, 11.99, 12.01, 12.03, 12.05, 12.07, 12.09, 12.11, 12.13, 12.15, 12.17, 12.19, 12.21, 12.23, 12.25, 12.27, 12.29, 12.31, 12.33, 12.35, 12.37, 12.39, 12.41, 12.43, 12.45, 12.47, 12.49, 12.51, 12.53, 12.55, 12.57, 12.59, 12.61, 12.63, 12.65, 12.67, 12.69, 12.71, 12.73, 12.75, 12.77, 12.79, 12.81, 12.83, 12.85, 12.87, 12.89, 12.91, 12.93, 12.95, 12.97, 12.99, 13.01, 13.03, 13.05, 13.07, 13.09, 13.11, 13.13, 13.15, 13.17, 13.19, 13.21, 13.23, 13.25, 13.27, 13.29, 13.31, 13.33, 13.35, 13.37, 13.39, 13.41, 13.43, 13.45, 13.47, 13.49, 13.51, 13.53, 13.55, 13.57, 13.59, 13.61, 13.63, 13.65, 13.67, 13.69, 13.71, 13.73, 13.75, 13.77, 13.79, 13.81, 13.83, 13.85, 13.87, 13.89, 13.91, 13.93, 13.95, 13.97, 13.99, 14.01, 14.03, 14.05, 14.07, 14.09, 14.11, 14.13, 14.15, 14.17, 14.19, 14.21, 14.23, 14.25, 14.27, 14.29, 14.31, 14.33, 14.35, 14.37, 14.39, 14.41, 14.43, 14.45, 14.47, 14.49, 14.51, 14.53, 14.55, 14.57, 14.59, 14.61, 14.63, 14.65, 14.67, 14.69, 14.71, 14.73, 14.75, 14.77, 14.79, 14.81, 14.83, 14.85, 14.87, 14.89, 14.91, 14.93, 14.95, 14.97, 14.99, 15.01, 15.03, 15.05, 15.07, 15.09, 15.11, 15.13, 15.15, 15.17, 15.19, 15.21, 15.23, 15.25, 15.27, 15.29, 15.31, 15.33, 15.35, 15.37, 15.39, 15.41, 15.43, 15.45, 15.47, 15.49, 15.51, 15.53, 15.55, 15.57, 15.59, 15.61, 15.63, 15.65, 15.67, 15.69, 15.71, 15.73, 15.75, 15.77, 15.79, 15.81,

Στην ίδια λογική βρίσκονται και τα στοιχεία ανωδομής του κτηρίου. Το επιστύλιο παρουσιάζει στο σύνολό του κύρτωση προς τα άνω. Η προς τα έσω κλίση της εξωτερικής επιφανείας του επιστυλίου, η οποία συνεχίζεται και στη ζωοφόρο, αποδεικνύει την μείωση στο σύνολο του κτηρίου, δηλαδή την στένωσή του προς τα άνω. Η αντιστάθμιση πραγματοποιήθηκε διότι ανθρώπινο μάτι τείνει να βλέπει τα αντικείμενα στο άνω μέρος του οπτικού του πεδίου, δηλαδή κυρτωμένα προς τα κάτω. Αναφέρει ο Α. Ορλάνδος σε έναν λόγο του στην Ακαδημία «όσα έχουν γραφτεί για την ωραιότητα των καμπύλων του στυλοβάτη του Παρθενώνος όχι μόνο δεν αναιρούνται, αλλά αντιθέτως ενισχύονται, όταν ένα πρόβλημα λειτουργίας και ανθεκτικότητας του κτιρίου επιλύεται με τρόπο ώστε οι καμπύλες να εμφυσούν ζωήν εις το σώμα της κατασκευής, να κινούν την μάζα του μαρμάρου. Και η μάζα αυτή, εκεί όπου φορτίζεται περισσότερο, ανασηκώνεται ως ένα στήθος που αναπνέει».⁷¹

36



Εικόνα 12: Η καμπύλωση του επιστύλιου

Το μεγαλύτερο και σημαντικότερο τμήμα των οπτικών πλανών όμως λαμβάνει χώρα στους κίονες του οικοδομήματος. Στους κίονες της περίστασης και στους κίονες στις προστάσεις. Ο Penrose απέδειξε ότι οι άξονες των κίωνων στις προστάσεις του Παρθενώνος είναι κατακόρυφοι, όπως και αυτοί της περίστασης.⁷² Οι δωρικοί κίονες που περιστοιχίζουν το ναό παρουσιάζουν δύο βασικά στοιχεία, την ένταση και τη μείωση.

Η ένταση ενός κίονα δωρικού συνίσταται στη σταδιακή του κλίση προς τα μέσα. Συγκεκριμένα, οι κίονες τους πετρού κλίνουν όλοι προς το εσωτερικό κατά 0,07 μ. ενώ οι γωνιακοί κίονες που μετέχουν και στις δύο μεριές κλίνουν κατά 0,10 μ. Αν προεκτείνουμε τους κίονες με την κλίση αυτή, οι κίονες των μακρών πλευρών θα συνέκλιναν σε ύψος δύο χιλιομέτρων ενώ των στενών σε ύψος πέντε χιλιομέτρων.⁷³ Η ένταση δεν ήταν σε καμιά περίπτωση μεγαλύτερη από τη διάμετρο της βάσης του κίονα. Ως ένταση δεν χαρακτηρίζεται μονάχα η ελαφρά καμπύλωση των κίωνων αλλά και μια ελαφρά πάχυνση του κίονα στο μέσο του, περίπου στο 1/3 της απόστασης από την κρηπίδα. Με άλλα λόγια, οι κορμοί των κίωνων εμφανίζουν ένα «φούσκωμα»

⁷²Ζαμπάς, Κ., ό.π., σ. 79.

⁷³Neer T. R., Τέχνη και Αρχαιολογία του Ελληνικού Κόσμου, Ινστιτούτο Βιβλίου – Καρδαμίτσα, Αθήνα, 2018, σ.275.

εντελώς ανεπαίσθητο, αλλά με μεγάλη αισθητική σκοπιμότητα. Η εκλέπτυνση αυτή αξιοποιήθηκε λόγω της ιδιαίτερης φυσιολογίας του ανθρώπινου ματιού. Οι οφθαλμοί, λόγω της θέσης τους, προσλαμβάνουν τα ερεθίσματα διοφθαλμικά, μέσω του φαινομένου της σύγκλισης. Τα μάτια συγκλίνουν κάτω και άνω του ορίζοντα για να παρατηρήσουν κάτι και μόνο όταν υφίσταται η πάχυνση λόγω της εκούσιας έντασης των κίωνων βλέπουν τις πλευρές του κυλίνδρου κατακόρυφες και επομένως και τις πλευρές του κίονα ευθύγραμμες, παρόμοια συμπεριφορά και με τη σφαίρα.⁷⁴

Μια ερμηνεία από τη σκοπιά ενός μαθηματικού της αρχαιότητας έδωσε πολύ μετά τον Βιτρούβιο ο Ηλιόδωρος ο Λαρισαίος, την οποία παραθέτει ο Ορλάνδος. «*Τέλος δέ τω ἀρχιτέκτονιτό προς φαντασίαν εύρυθμον ποιήσαι το εργον καί, όπόσονέγχωρεί, προς τάς της όψεως άπάταςάλεξήματαάνευρίσκειν, ού τής κατ' αλήθειανίσότητος ή εύρυθμίας, αλλά τής προς όψιν στοχαζομένω· ούτω γούντόμέν κύλινδρον κίονα έπέικατεαγόταεμελλεθεωρήσειν κατά προς όψινστενούμενον, εύρύτερον κατά ταυτα ποιεί*». ⁷⁵Οι οφθαλμοί λοιπόν απαιτούν την ένταση των κολόνων, για να μην προκύψει ένα αποτέλεσμα άχαρο και ακαλαίσθητο. Εν ολίγοις, αντιλαμβανόμαστε με κάποιο τρόπο τις ευθείες ως καμπύλες και προσδίδουμε ακουσίως πάχυνση σε ομοιόμορφες ευθείες.

Η μείωση, η άλλη ιδιότητα των κίωνων, έχει επίσης αντισταθμιστική σκοπιμότητα. Λόγω της μείωσης, ο κίονας καθώς ανεβαίνει γίνεται όλο και λεπτότερος. Με άλλα λόγια, η διάμετρος του κίονα στη βάση είναι μεγαλύτερη της διαμέτρου του κίονα στην κορυφή. Με αυτή την έννοια η επίλυση του προβλήματος της γεωμετρικής συμφωνίας των μερών του κτιρίου οδηγεί σε ένα άρτιο αισθητικό αποτέλεσμα.⁷⁶

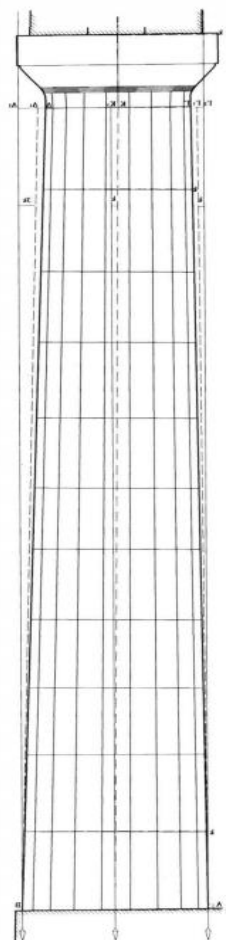
Ένα άλλο στοιχείο που σχετίζεται με τις οπτικές πλάνες είναι η πάχυνση των γωνιαίων κίωνων σε σύγκριση με τους εξωτερικούς. Αυτοί βρίσκονται στο μεταίχμιο μεταξύ μακράς και στενής πλευράς κιονοστοιχιών. Είναι οι εξωτερικοί κίονες και έχουν κατασκευαστεί σε όλες τις πλευρές παχύτεροι. Ο Βιτρούβιος ερμηνεύει αυτή την εκλέπτυνση. Επειδή αυτοί οι κίονες είναι εκτεθειμένοι στον αέρα και το φως, διαβρώνονται και φαίνονται στον παρατηρητή λεπτότεροι από το κανονικό.⁷⁷

⁷⁴Heath, L. T., ό.π. 530.

⁷⁵Ζαμπάς, Κ., ό.π., σ. 132.

⁷⁶Ζαμπάς, Κ., ό.π., σ. 134.

⁷⁷Ζαμπάς, Κ., ό.π., σ. 132.



Εικόνα 13: Ένταση και μείωση του κίονα.

Παρθενώνας και Μαθηματικά

Υπάρχουν πολλοί ισχυρισμοί που έχουν διατυπωθεί κατά καιρούς για διάφορα ζητήματα που αφορούν τον Παρθενώνα. Σε αντίθεση με την ευρεία δημοτικότητα του μνημείου, την λαμπερή του αύρα και αίγλη, η αρχιτεκτονική του Παρθενώνα καλύπτεται από αβεβαιότητα και διαφωνίες. Ακόμη και ποιοι πραγματικά είναι οι αρχιτέκτονες και μηχανικοί⁷⁸ ή το πραγματικό του όνομα⁷⁹, είναι ερωτήματα που ακόμη και σήμερα οι απαντήσεις τους τελούν υπό αμφισβήτηση. Οι προσπάθειες που έγιναν από το 1830 ώστε να ανακαλυφθεί, ή σε πολλές περιπτώσεις να εφευρεθεί, κάποια μαθηματική βάση που στηρίχθηκε η κατασκευή του Παρθενώνα είναι πολλές. Ερευνητές έφτασαν στο σημείο εφαρμόζοντας τις μουσικές αναλογίες του Πυθαγόρα, να προσδώσουν στο ναό μουσικές – αρμονικές ιδιότητες.⁸⁰

Οι περισσότεροι συγγραφείς βιβλίων και άρθρων για την Χρυσή Τομή αποφαινόμενοι πως ο αριθμός «φ» είναι κρυμμένος σε πολλές αναλογίες χαρακτηριστικών του Παρθενώνα. Ωστόσο, σοβαρές διαφωνίες έχουν διατυπωθεί στον ακαδημαϊκό και δημόσιο διάλογο σε ό,τι αφορά στις μαθηματικές σχέσεις και αριθμούς που εμφανίζονται στις διαστάσεις του Παρθενώνα. Η «ύπαρξη» για παράδειγμα του αριθμού «Φ» στο ναό για μερικούς μελετητές αποτελεί μία μυθοπλασία. Ας γίνει σαφές όμως από την αρχή η δυσκολία της προσπάθειας απόδειξης ύπαρξης ή μη, άρρητων αριθμών στον πραγματικό κόσμο και όταν αυτό επιτυγχάνεται, συμβαίνει πάντοτε κατά προσέγγιση και εξαρτώμενο από τις εκάστοτε μετρήσεις.

Από τα πρώτα έργα που ασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά του Παρθενώνα και πιο επιστάμενα με την Χρυσή Τομή ήταν το «Der Goldne Schnitt» (Η Χρυσή Τομή) του Adolf Zeising, το 1884. Ακολούθησαν και άλλα με παρόμοιες μελέτες, τα πιο σημαντικά εκ των οποίων είναι το «LeNombred'or» (οΧρυσός Αριθμός) του Matila Ghyka (1931), το «The Golden Number and the Scientific Aesthetics of Architecture» (ο Χρυσός Αριθμός και η επιστημονική αισθητική της Αρχιτεκτονικής) του Miloutine

⁷⁸Dendrinis, S. D., *On the Parthenon's Mathematics, Astronomy and its Emdedded Harmony*, σ. 4.

⁷⁹van Rookhuijzen, Z. J., «The Parthenon Treasury on the Acropolis of Athens», *American Journal of Archaeology*, 2020, Vol. 124, No. 1, σ. 3-35

⁸⁰Kappraff, J., McClain G. E., «The System of Proportions of the Parthenon: A Work of Musically Inspired Architecture», *Music in Art*, 2005, Vol. 30, No. 1/2, σ. 5-16.

Borissavlievitch (1958) , το «Architecture: From Prehistory to Post-Modernism» των Marvin Trachtenberg και Isabelle Hyman (1985) .⁸¹

Ωστόσο, υπήρξε και ο αντίλογος με σημαντικότερα έργα των Markowski, της Christine Flon στο «TheWorld Atlas of Architecture» (Ο Παγκόσμιος Άτλας της Αρχιτεκτονικής, 1984) και του Stuart Rossiter στο «Greece» (Ελλάδα, 1977), οι οποίοι επιχειρηματολογούν κατά της εμφάνισης του αριθμού φ στον Παρθενώνα.⁸²

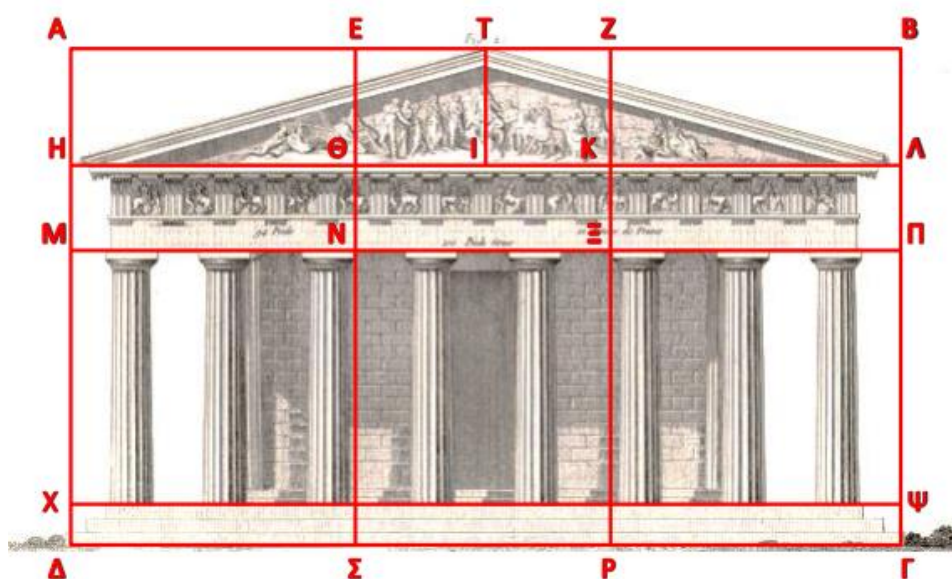
⁸¹Livio, M., *ό.π.*, σ. 110.

⁸²Livio, M., *ό.π.*, σ. 111.

Ο Παρθενώνας και η Χρυσή Τομή

Η εικόνα της πρόσοψης του Παρθενώνα «ντυμένη» με διάφορα σχέδια τα οποία παραπέμπουν στην ύπαρξη της Χρυσής Τομής έχει κατακλύσει το διαδίκτυο και την βιβλιογραφία. Από τους πρώτους που έκαναν προσπάθειες να εξετάσουν την ύπαρξη ή μη της Χρυσής Τομής στην πρόσοψη του Παρθενώνα ήταν ο Jay Hambidge στο έργο του «The Parthenon and other Greek Temples: Their Dynamic Symmetry». Βασισμένος στις μετρήσεις του Penrose⁸³, ο Hambidge θεωρεί ότι η εμφάνιση του Χρυσού Λόγου στην πρόσοψη του Παρθενώνα είναι ξεκάθαρη.

Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ στο οποίο εγγράφεται η πρόσοψη του Παρθενώνα (συμπεριλαμβανομένου του κρηπιδώματος) αποτελείται από τρία Χρυσά Ορθογώνια, ΑΕΣΔ, ΖΒΓΡ, ΘΚΡΣ και δύο τετράγωνα ΕΤΙΘ και ΤΖΚΙ. Επίσης, το ευθύγραμμο τμήμα ΜΠ το οποίο ορίζεται ως η νοητή ευθεία των πάνω μέρους των κιονόκρανων που εφάπτονται στο επιστύλιο, χωρίζει το ΑΒΓΔ ώστε να ισχύει: $\frac{ΑΔ}{ΑΜ} = \frac{ΒΓ}{ΒΠ} = \varphi$.⁸⁴

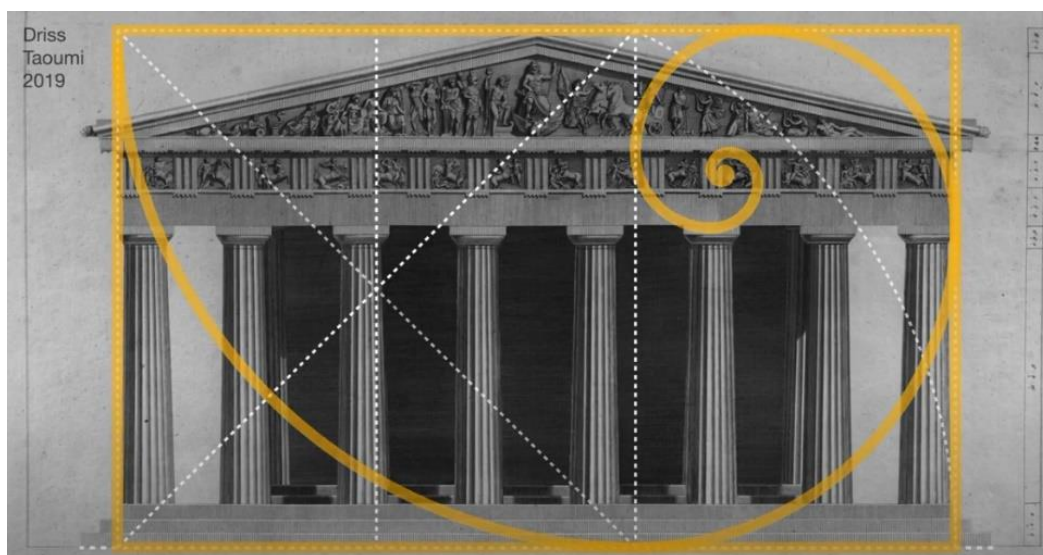


⁸³Για τις μετρήσεις του Penrose, βλ. Penrose, F. C., *An Investigation of the Principles of Athenian Architecture*, MacMillan and Co., New York, 1888.

⁸⁴Hambidge, J., *The Parthenon and other Greek Temples: Their Dynamic Symmetry*, London, Yale University Press, London, 1924, σ.14-19.

Εικόνα 14: Η πρόσοψη του Παρθενώνα κατά Hambidge

Πολλοί μελετητές⁸⁵ παρουσιάζουν μία εικόνα διαφορετική εικόνα από τον Hambidge όπως η παρακάτω προκειμένου να δείξουν πως η πρόσοψη του Παρθενώνα εγγράφεται σε ένα Χρυσό Ορθογώνιο. Κανείς όμως δεν φαίνεται να ενδιαφέρεται για τα μέρη του ναού που μένουν έξω από αυτό. Όλες αυτές οι διαπιστώσεις οφείλονται στην ύπαρξη διαφορετικών μετρήσεων. Με τόσους αριθμούς διαθέσιμους οι υποστηρικτές της Χρυσής Τομής φαίνεται να διαλέγουν όποιον συνδυασμό αριθμών τους βοηθά προκειμένου να φτάσουν όσο το δυνατόν πιο κοντά στη Χρυσή Αναλογία.⁸⁶



Εικόνα 15: Η πρόσοψη του Παρθενώνα με μέρη του έξω από το χρυσό ορθογώνιο

Σύμφωνα με την παραπάνω εικόνα, γίνεται αντιληπτό πως η χρυσή αναλογία υπάρχει μεταξύ και άλλων μερών της πρόσοψης, όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες. Τα κίτρινα μέρη προς τα λευκά μέρη θα έπρεπε να έχουν λόγο $\varphi \approx 1,618$.

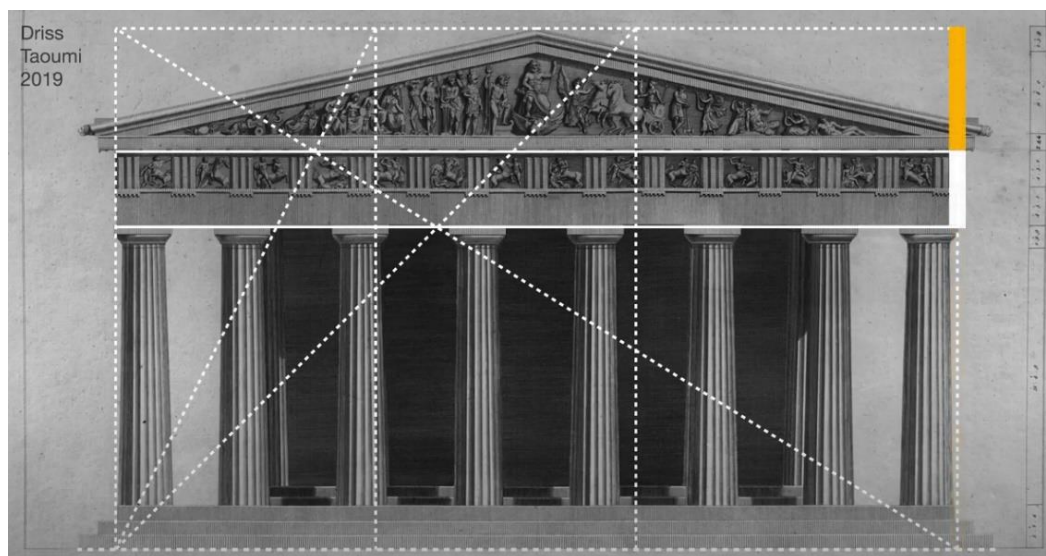
⁸⁵Bergamini, D., *Mathematics*, Time Incorporated, New York, 1963, σ. 94-95.

Francis S. Hill, *Computer Graphics*, MacMillan, New York, 1990, σ. 79.

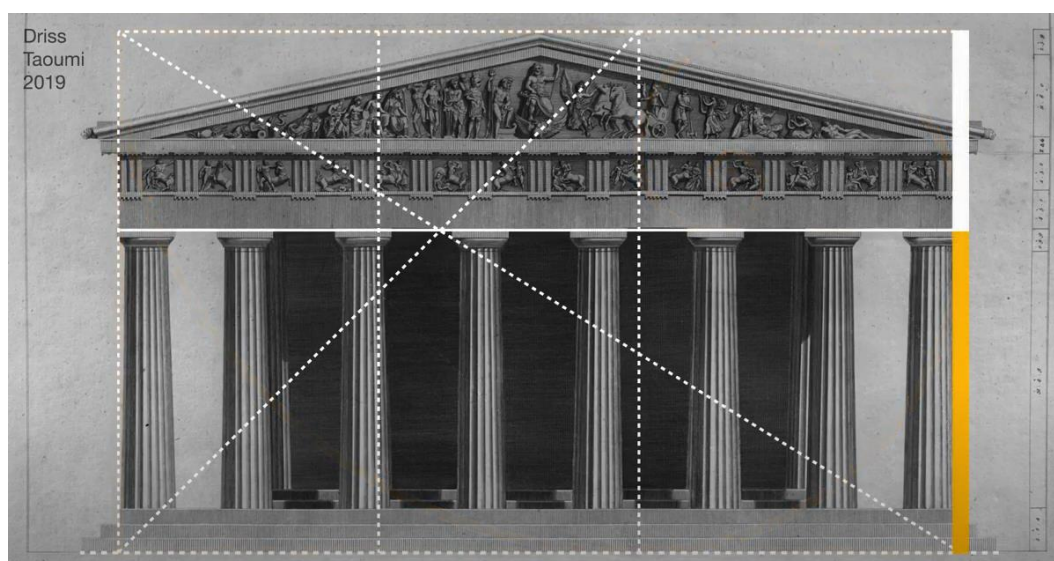
H. E. Hantley, *The Divine Proportion*, Dover, New York, 1970, σ. 63.

George Manuel, Amalia Santiago, «An unexpected appearance of the golden ratio», *The College Mathematics Journal*, Vol. 19, 1988, σ. 163.

⁸⁶Markowsky, G., «Minsconceptions about the Golden Ratio», *The College Mathematics Journal*, Vol. 23, No. 1, σ. 8-9.



Εικόνα 16: Αναλογίες στην πρόσοψη του Παρθενώνα



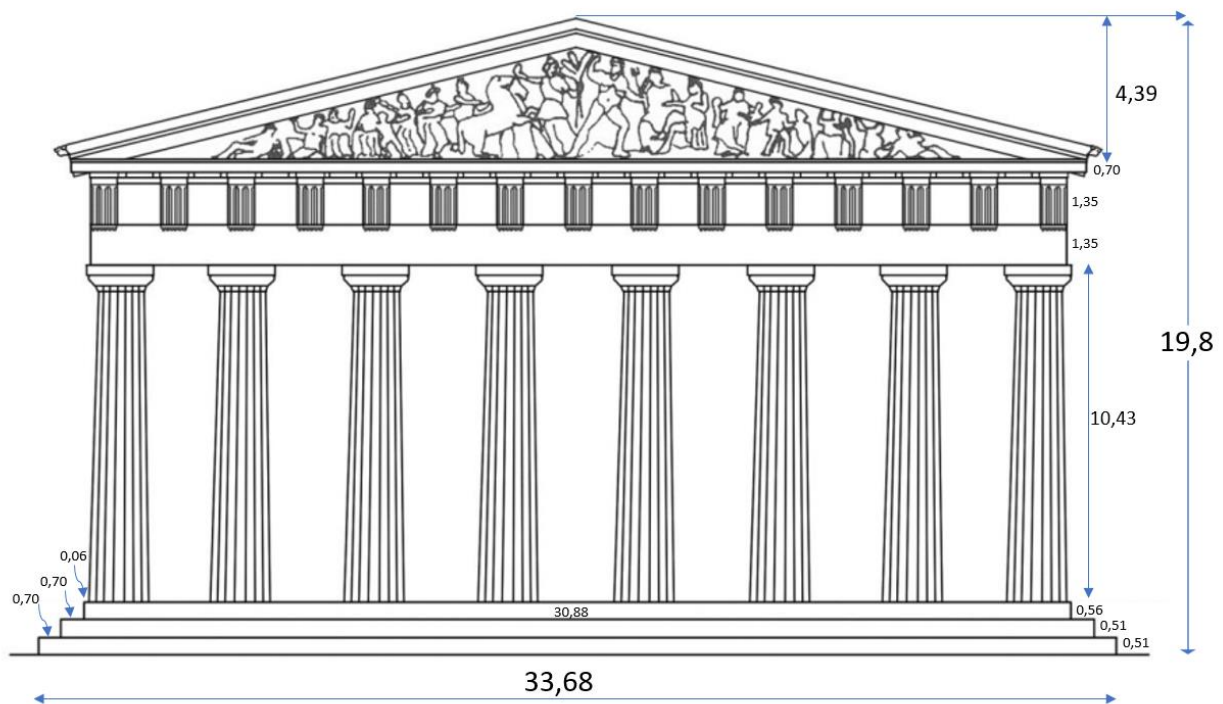
Εικόνα 17: Αναλογίες στην πρόσοψη του Παρθενώνα

Ας παρατηρήσουμε τώρα την παρακάτω εικόνα της πρόσοψης του Παρθενώνα σύμφωνα με τις μετρήσεις των Κορρέ και Μπούρα.⁸⁷ Αν δεχθούμε σαν πλάτος του ναού ολόκληρη την κρηπίδα (33,68) και σαν ύψος από την ευθυνηρία μέχρι την κορυφή (19,8), ο λόγος αυτών των δύο είναι $\frac{33,68}{19,8} = 1,701$, αριθμός που απέχει αρκετά από το ϕ . Ας υποθέσουμε όμως πως δεχόμαστε μόνο το πλάτος του

⁸⁷Κορρές, Μ., Μπούρας, Χ., *Μελέτη αποκαταστάσεως του Παρθενώνος*, Υπουργείο Πολιτισμού και Επιστημών – Επιτροπή Συντηρήσεως Μνημείων Ακροπόλεως, Αθήνα, 1983.

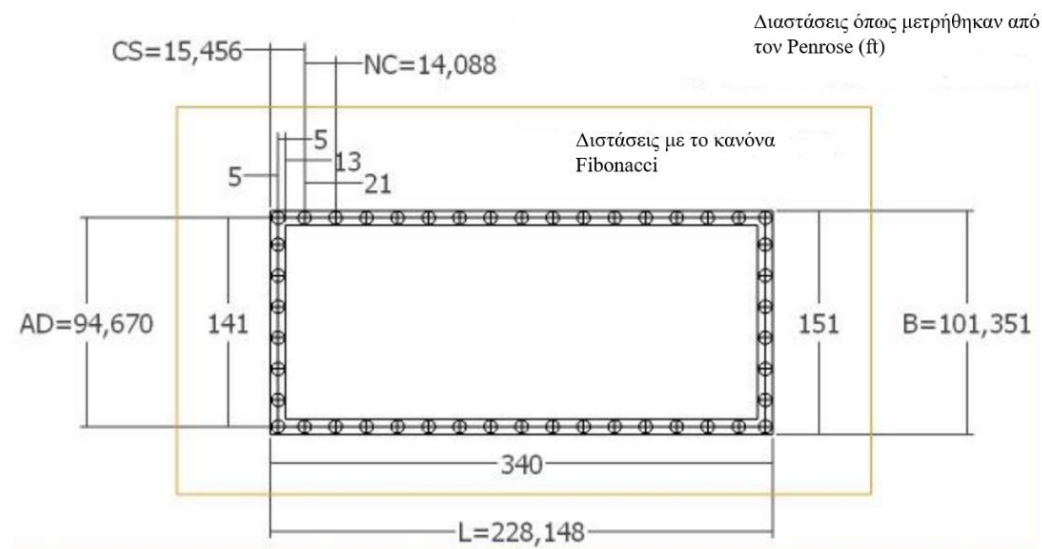
στυλοβάτη (30,88) και το ίδιο μέγιστο ύψος. Τότε θα έχουμε τον λόγο $\frac{30,88}{19,8} = 1,559$, πάλι απέχει από τον Χρυσό Αριθμό.

Συνεχίζοντας τις προσπάθειες, για την εικόνα με το άνω μέρος του ναού, καταλήγουμε σε έναν λόγο $\frac{4,39}{3,4} = 1,29$ και για τον χωρισμό του ύψους του ναού έχουμε $\frac{0,51+0,51+0,56+10,43}{4,39+0,7+1,35+1,35} = \frac{12,01}{7,79} = 1,541$. Παρατηρούμε πως όλοι αυτοί οι λόγοι απέχουν από τον Χρυσό Λόγο. Το ζήτημα είναι αν απέχουν αρκετά, ώστε κάποιοι χρησιμοποιώντας άλλες μετρήσεις και μη αριθμητικές μεθόδους να μπορούν να καταλήξουν σε λανθασμένα συμπεράσματα.



Εικόνα 18: Οι μετρήσεις των στοιχείων της πρόσοψης του Παρθενώνα

Ο Ugur Gulcugil παραθέτει έναν τρόπο υπολογισμού των αποστάσεων στον Παρθενώνα με την χρήση των όρων της ακολουθίας Fibonacci 5, 13, 21.⁸⁸ Με την διαδικασία που επινόησε φαίνεται να φτάνει στις αναλογίες των μετρήσεων του Penrose με ακρίβεια σε εύρος από -0,18% έως 0,15%.

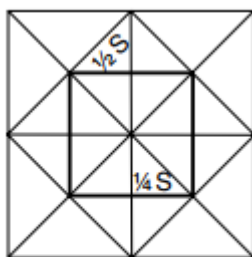
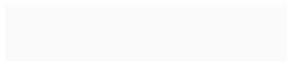


Εικόνα 19: Οι μετρήσεις του Gulcugil Ισύμφωνα με όρους της ακολουθίας Fibonacci

Τέλος, παρατίθεται ένα παράδειγμα εφαρμογής της γεωμετρικής κατασκευής της Χρυσής Τομής αλλά και της εύρεσης τετραγώνου, όπως περιγράφεται από τον Πλάτωνα στο έργο του «Μένων», για τις διαστάσεις του κρηπιδώματος, τη θέση του πρώτου στυλοβάτη, και του εσωτερικού του ναού του Παρθενώνα με βάση το αρχικό τετράγωνο πλευράς ίσης με το πλάτος του στυλοβάτη.⁸⁹

⁸⁸Gulcugil, A., *Fibonacci and the Parthenon Peristasis*, Kindle Edition, 2018.

⁸⁹Leonardis, R., ό.π., σ. 101.

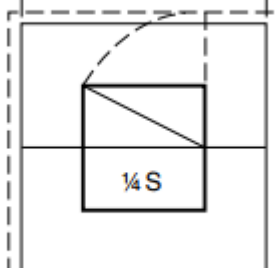


Αφού κατασκευαστεί τετράγωνο S, κατασκευάζεται τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το $\frac{1}{4}S$

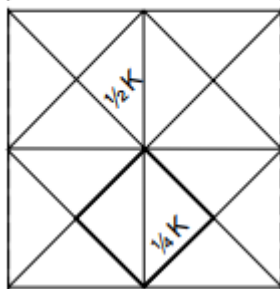
K: Τετράγωνο με πλευρά ίση με το πλάτος του Κρηπιδώματος.

S: Τετράγωνο πλευράς ίσης με το πλάτος του στυλοβάτη.

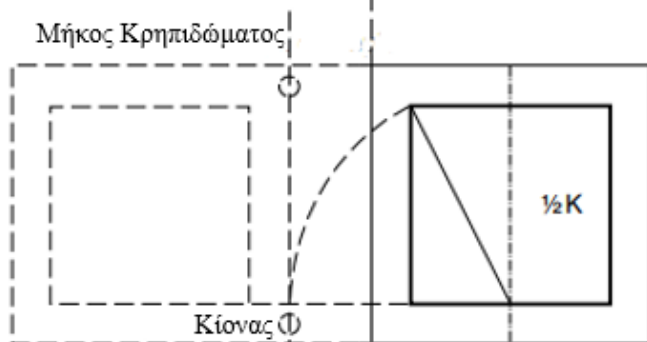
Όπου $\frac{1}{2} K$, $\frac{1}{2} S$ κτλ, τετράγωνα με εμβαδόν ίσο με το κλάσμα που δηλώνεται μπροστά από το κάθε τετράγωνο.



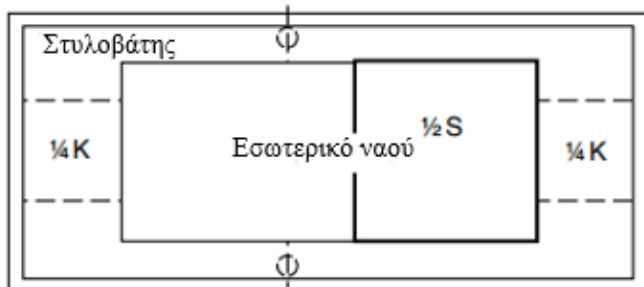
Μετά την τοποθέτηση στο κέντρο του $\frac{1}{4}S$, προσδιορίζεται, σύμφωνα με την κατασκευή του Χρυσού Ορθογώνιου, η θέση του στυλοβάτη.



Στη συνέχεια, κατασκευάζεται τετράγωνο K και έπειτα τα τετράγωνα $\frac{1}{2} K$ και $\frac{1}{4} K$.



Τοποθετώντας το τετράγωνο $\frac{1}{2}K$ στο κέντρο του τετραγώνου K, κατασκευάζεται χρυσό ορθογώνιο και προσδιορίζεται η θέση του πρώτου κίονα.



Τέλος, το πλάτος του εσωτερικού του ναού είναι ίσο με την πλευρά του $\frac{1}{2} S$ και η απόσταση του ναού από τον στυλοβάτη μπροστά και πίσω από το ναό είναι ίση με την πλευρά του $\frac{1}{4} K$.

Συμπεράσματα

Από τα τέλη του 18^{ου} αιώνα, και ειδικότερα στις αρχές του 19^{ου}, εμπεδώνεται σε ολόκληρη την Ευρώπη το κίνημα του Φιλελληνισμού. Μπορεί να μην είναι ακριβώς κίνημα με την πολιτική έννοια του όρου, ασφαλώς σε μία εποχή όπου τα πολιτικά κινήματα μονοπωλούν τις εξελίξεις, είναι όμως μια διαδικασία στην οποία η «ελληνικότητα» και τα σημανόμενα αυτής τίθενται στο επίκεντρο της δημόσιας συζήτησης. Δεν είναι φυσικά τυχαία η συγκυρία, καθώς αποτελεί απότοκο της διαφωτιστικής κληρονομιάς και της εκ νέου ανακάλυψης της κλασικής ελληνικής αρχαιότητας.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο, οι διαφωτιστικές επιταγές συγκροτούνται από δύο, μεταξύ άλλων, βασικές συνιστώσες: την αρχαία ελληνική κληρονομιά και τον θετικισμό. Η ταυτόχρονη άνθηση των ανθρωποκεντρικών ιδεών της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας και της εκκοσμικευμένης ερμηνείας του κόσμου μέσα από τις θετικές επιστήμες, οριοθετούν τις διανοητικές αντιλήψεις της εποχής. Έτσι, τα Μαθηματικά ως θεμελιακό πεδίο των θετικών επιστημών αποκτούν βαρύνουσα θέση στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύεται η πραγματικότητα, αφήνοντας πίσω την προνομιακή μέχρι τότε ηγεμονία της μεταφυσικής θρησκευτικότητας. Επομένως τα μαθηματικά και η κλασική ελληνική αρχαιότητα, όντας δύο από τα βασικά κομμάτια στον κόσμο των ιδεών της εποχής, συνδυάζονται και συνεργούν προς την κατεύθυνση που ορίζουν οι διαφωτιστικές τάσεις.

Ο Φιλελληνισμός του 18^{ου}-19^{ου} αιώνα, δεν ανακαλύπτει μόνο την ελληνική αρχαιότητα, αλλά την εξιδανικεύει και την συμβολοποιεί. Αυτή λοιπόν η ελληνική μοναδικότητα και η φαντασιακή αποκρυστάλλωση της ελληνικής ιδέας επιτελείται έξω από την Ελλάδα και όχι από τους ίδιους τους Έλληνες. Το νεότερο ελληνικό κράτος και κατ' επέκτασιν η ιδέα της νεότερης Ελλάδας, ετεροπροσδιορισμένη και ετερόχθονη, συνιστά την ιδέα ενός αιώνιου και υπερϊστορικού συστήματος σημασιών και συμβόλων. Μέσα λοιπόν από αυτή τη διαδικασία, επιχειρείται για πρώτη φορά ο συνδυασμός αυτών των δύο θεμελιακών πεδίων, των μαθηματικών και της αρχαίας ελληνικής κληρονομιάς. Η συνάρθρωση αυτών επιτελείται με σκοπό την αμοιβαία ενίσχυσή τους, αναζητώντας τις ιστορικές ρίζες και καταβολές μέσα από το ερμηνευτικό πρίσμα της απόλυτης αλήθειας των αριθμών.

Ο ιερός βράχος της Ακρόπολης και ο ναός του Παρθενώνα προσφέρονται εξαιρετικά για τους σκοπούς αυτής της εξιδανικευμένης συνάρθρωσης. Μέσα από τις μετρήσεις και τους υπολογισμούς, οι αριθμοί, απόλυτοι και μη αμφισβητήσιμοι, αναδεικνύουν την «τέλεια» ομορφιά. Ο «χρυσός λόγος» θα αποτελέσει αντικείμενο αναζήτησης στην προσπάθεια εξεύρεσης της ιδανικής αναλογίας. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, και ενδεχομένως κάτω από ιδεολογικές σκοπιμότητες, η οικουμενικότητα των μαθηματικών θα επιχειρήσει να αναδείξει την οικουμενικότητα της αρχαίας ελληνικής κληρονομιάς. Η σύνδεση αυτής της κληρονομιάς του αρχαίου κλέους με τις σύγχρονες θετικιστικές επιταγές, θα προσαρμοστεί ώστε να επιτελέσει τους οικουμενικούς-συμβολικούς σκοπούς της, ακόμα και αν η απόλυτη αλήθεια των Μαθηματικών χρειαστεί να «στριμωχτεί» ανάμεσα σε κίονες, επιστήλια και ευθυνητήρια.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Boyer, H., Merzbach, U., *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Πνευματικός, Αθήνα, 1997.

Bury, J. B., Meiggs, R., *Ιστορία της Αρχαίας Ελλάδας*, Ινστιτούτο βιβλίου – Α. Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1975, σ. 348.

Γκουντουβάς, Σ., *Γεωμετρικές Διαδρομές: Θέματα Γεωμετρίας από την Αρχαιότητα ως τον 20^ο αιώνα*, Αθήνα, 2015.

Camp, M. J., *Οι αρχαιότητες της Αθήνας και της Αττικής*, Ινστιτούτο του Βιβλίου – Καρδαμίτσα, Αθήνα, 2009.

Davis, M. D., *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2015.

Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου, Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων, σ. 204.

Ζαμπάς, Κ., *Οι εκλεπτύνσεις των κιόνων του Παρθενώνος*, Υπουργείο Πολιτισμού – Επιτροπή Συντηρήσεως Μνημείων Ακροπόλεως, Αθήνα, 2002.

Gruben, G., *Ιερά και Ναοί των Αρχαίων Ελλήνων*, Ινστιτούτο του Βιβλίου – Καρδαμίτσα, Αθήνα, 2015.

Heath, L. T., *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, τ.1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης – Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001.

Ιστορία του Ελληνικού Έθνους, Πεντάτομη Έκδοση.

Κοντογιάννης, Δ., Ντιαχρήστος, Β., Τσιγώνη, Τ., «Βιβλίο IV», στο Εξαρχάκος Θ. (επιμ.), *Ευκλείδη Στοιχεία, Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και*

σχολιασμό, *Η Γεωμετρία του Επιπέδου*, τ. 1, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.), Αθήνα, 2001.

Κορρές, Μ., Μπούρας, Χ., *Μελέτη αποκαταστάσεως του Παρθενώνος*, Υπουργείο Πολιτισμού και Επιστημών – Επιτροπή Συντηρήσεως Μνημείων Ακροπόλεως, Αθήνα, 1983.

Livio, M., *Ο χρυσός λόγος: Η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού*, Ενάλιος, Αθήνα, 2002.

Lloyd, G. E. R., *Αρχαία Ελληνική Επιστήμη*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2014.

Mankiewicz, R., *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, Αλεξάνδρεια, Αθήνα, 2000.

Μπένγκτσον, Χ., *Ιστορία της Αρχαίας Ελλάδος: από τις απαρχές μέχρι τη Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία*, Μέλισσα, 1991.

Neer, T. R., *Τέχνη και Αρχαιολογία του Ελληνικού Κόσμου*, Ινστιτούτο Βιβλίου – Καρδαμίτσα, Αθήνα, 2018, σ.275.

Πλάντζος, Δ., *Ελληνική Τέχνη και Αρχαιολογία 1100 – 30 π.Χ.*, ΚΑΠΟΝ, 2013.

Σάλιαρος, Μ., «Η χειρόγραφη παράδοση των Στοιχείων του Ευκλείδη», *ΝΕΥΣΙΣ*, Vol. 22, 2014, σ. 121-147.

Χαμηλάκης, Γ., *Το Έθνος και τα ερείπια του*, Εκδόσεις του Εικοστού Πρώτου, Αθήνα, 2012.

Ξενόγλωσση

Akhtaruzzaman, M., Shafie, A., «Geometrical Substantiation of Phi, the Golden Ratio and the Baroque of Nature, Architecture, Design and Engineering», *International Journal of Arts*, 2011, Vol.1, σ. 1-22.

Barletta, A. B. D., *Architecture and Architects. in the Parthenon: From Antiquity to the Present*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

Barletta, A. B. D., «In Defense of the Ionic Frieze of the Parthenon», *American Journal of Archaeology*, 2009, Vol. 113, No. 4, σ. 547-568.

Bergamini, D., *Mathematics*, Time Incorporated, New York, 1963.

Birch, F., «An In-depth Investigation of the Divine Ratio», *The Montana Mathematics Enthusiast*, Vol. 3, No.2, 2006, σ. 157 - 175.

Bradley, M. J., *The birth of mathematics: Ancient times to 1300*, NY: Chelsea House, New York, 2006.

Dendrinios, S. D., *On the Parthenon's Mathematics, Astronomy and its Emdedded Harmony*.

Eves, H., *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, Dover Publications, Mineola, N.Y., 1997.

Gangwar, Ar. G., «Principles and Applications of Geometric Propotions in Architectural Design», *Journal of Civil Engineering and Environmental Technology*, Vol. 4, Issue 3, 2017, σ. 171-176.

Gulcugil, A., *Fibonacci and the Parthenon Peristasis*, Kindle Edition, 2018.

Hambidge, J., *The Parthenon and other Greek Temples: Their Dynamic Symmetry*, London, Yale University Press, London, 1924.

Hantley, H., *The Divine Proportion*, Dover, New York, 1970.

Hill, F.S., *Computer Graphics*, MacMillan, New York, 1990.

Jarvis, D., Adams, L. T., «Mathematics and Visual Arts: Exploring the Golden Ratio», *Mathematics Teaching in the Middle School* ,2007, Vol. 12, No. 8, σ. 467-473.

Kappraff, J., McClain G. E., «The System of Proportions of the Parthenon: A Work of Musically Inspired Architecture», *Music in Art* , 2005, Vol. 30, No. 1/2, σ. 5-16.

Khoshnaw, D., Hawez, W., «How to Explore Golden Ratio in Architecture and Designing City», *International Journal of Engineering Research and Applications*, Vol. 6, Issue 8, (Part 4), 2016, σ. 1-7.

Kingsley, P., *Ancient Philosophy, Mystery, and Magic: Empedocles and the Pythagorean Tradition*. Oxford, 1995.

Leonardis, R., «The Use of Geometry by Ancient Greek Architects», Miles, M. (επιμ.),
A Companion to Greek Architecture, John Wiley & Sons, Inc., 2016.

Lewis, C. D., «Revealing the Parthenon's logos optikos»,*Design and Nature*, CA Brebbia, L Sucharov& P Pascola (επιμ.), Southapton, 2002.

Manuel G., Santiago A., «An unexpected appearance of the golden ratio», *The College Mathematics Journal*, Vol. 19, 1988, σ. 160-171.

Markowsky, G., «Minsconceptions about the Golden Ratio», *The College Mathematics Journal*, Vol. 23, No. 1, σ. 8-9.

Miles, M., «Appearance and Essence. Refinements of Classical Architecture: Curvature by Lothar
Haselberger», *Journal of the Society of Architectural Historians*, Vol. 60, No. 1, 2001, σ. 80-92.

Nagy, D., «Architecture, mathematics, and a “symmetric link” between them», G. Darvas & D. Nagy (επιμ.), *Symmetry: Art and Science*, International Symmetry Foundation, Vol.2, 2002, σ. 27-38.

Nardo, D., *The Parthenon of Ancient Greece*, ReferencePoint Press, San Diego, 2014.

Osen, M. L., *Women in Mathematics*, Cambridge, Mass., MIT Press, 1975.

Penrose, F. C., *An Investigation of the Principles of Athenian Architecture*, MacMillan and Co., New York, 1888.

Rookhuijzen, Z. J., «The Parthenon Treasury on the Acropolis of Athens», *American Journal of Archaeology*, 2020, Vol. 124, No. 1, σ. 3-35

Vico-Prieto, A., Cagigas, A., Rosas, J., Callejas-Aguilera, J., «Experimental approach to the study of beauty: The role of golden proportion», *Psicológica*, 2016, Vol. 37, σ. 187-207.

Wycherley, R. E., *The Stones of Athens*, Princeton University Press, Princeton, 1992.