

ΙΟΝΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Συσχέτιση κλασσικών και μη συμβατικών
παιχνιδιών**

Μαγδαληνή Βαρβούζου ΑΜ(Π2014127)

Επιβλέπων:

Θεόδωρος Ανδρόνικος

Αναπληρωτής Καθηγητής

Επιτροπή:

Μιχαήλ Στεφανιδάκης

Επίκουρος Καθηγητής

Μάρκος Αυλωνίτης

Επίκουρος Καθηγητής

Κέρκυρα Ιανουάριος 2019

Στους Γονείς μου,

*για τη στήριξη, τη βοήθεια και την αγάπη που μου προσφέρουν
απλόχερα.*

Περίληψη

Στην παρόν πτυχιακή εργασία εξετάζεται το θέμα των κλασσικών και μη συμβατικών παιχνιδιών. Παρατίθενται τα κοινά χαρακτηριστικά και οι διαφορές τους. Επιπρόσθετα μελετάτε εκτενώς η έννοια της Ισορροπίας Nash στον κλασσικό διανυσματικό χώρο V . Αλλά και σε χώρους που όπως θα δούμε χρησιμοποιούνται κυρίως από κβαντικά παιχνίδια όπως οι χώροι H Hilbert και B Banach.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	6
2	Τι είναι παιχνίδι;	8
3	Κατηγοριοποίηση των παιχνιδιών	10
1.	Διαδοχικών ή ταυτόχρονων κινήσεων	10
2.	Συμμετρικό ή ασύμμετρο	10
3.	Μηδενικού αθροίσματος ή μη μηδενικού αθροίσματος . . .	11
4.	Αβεβαιότητα και επίπεδο πληροφόρησης των παικτών . .	11
4	Στρατηγική	13
1.	Κυρίαρχη στρατηγική	13
2.	Κυριαρχούμενη στρατηγική	13
3.	Μικτή Στρατηγική	14
5	Στρατηγική κυριαρχία	15
1.	Απόλυτη Κυριαρχία σε παιχνίδια με καθαρές στρατηγικές	15
2.	Σχετική κυριαρχία	16
3.	Απόλυτη Κυριαρχία σε παιχνίδια με μικτές στρατηγικές .	16
6	Εύρεση στρατηγικών κυριαρχίας με τη μέθοδο IEDS	18
1.	Iterated Elimination of Dominated Strategies (IEDS)	18

7	Βασικές έννοιες	22
1.	πληρωμές	22
2.	Διπλωματία	22
3.	Κβαντικά παιχνίδια σε σχέση με τα κλασικά παιχνίδια . .	23
4.	Παιχνίδια για πολλούς παίκτες	23
5.	Υπέρθεση αρχικής κατάστασής	24
6.	Περιπλεγμένες (entangled) αρχικές καταστάσεις	24
7.	Υπέρθεση στρατηγικών που χρησιμοποιούνται στις αρχικές καταστάσεις	24
8.	Κβαντική εμπλοκή	25
9.	Επαναλαμβανόμενο παιχνίδι	26
10.	Πεπερασμένο παιχνίδι (finite game)	26
8	Ισορροπία Nash	28
1.	Καλύτερη απάντηση - best response	29
2.	Ορισμοί	29
3.	Καθαρή ισορροπία Nash	31
4.	Απόλυτη ισορροπία Nash	33
5.	Μικτή ισορροπία Nash	34
6.	Η μάχη των φύλων και μονά ζυγά	36
7.	Πέτρα, Ψαλίδι, χαρτί	39
8.	Συμπεράσματα	40
9	Κβαντική Ισορροπία Nash	41
1.	Κβαντική ισορροπία Nash στο χώρο $SU(2)$	41
2.	Κβαντική ισορροπία Nash της μάχης των φύλων	42

10 Το δίλημμα των φυλακισμένων	45
11 Το δίλημμα των φυλακισμένων για πολλούς παίκτες	49
12 Διανυσματικός χώρος Hilbert	53
13 Πληρωμές σε χώρους Hilbert	55
14 ισορροπία Nash σε χώρους Hilbert	57
1. Ισορροπία Nash στο κβαντικό παιχνίδι Κορώνα-Γράμματα	58
2. Ισορροπία Nash στο Δίλημμα των φυλακισμένων	61
15 Ισορροπία σε χώρους Hilbert	65
16 Ισορροπία Nash σε χώρους Banach	67
1. Θεωρήματα σταθερού σημείου σε χώρους Banach	67
2. Ισορροπία Nash	68
17 Συμπεράσματα	70

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στα πλαίσια τις παρακάτω πτυχιακής εργασίας, ο αναγνώστης θα εξερευνήσει την έννοια των συμβατικών και μη συμβατικών παιχνιδιών. Αρχικά παρουσιάζεται η έννοια του τι νοητέ ως παιχνίδι όπως την καταλαβαίνουμε στον κανονικό απτό κόσμο αλλά και στον κβαντικό. Παρατίθενται τα βασικά συστατικά ενός παιχνιδιού και η βασική ιδέα των κανόνων.

Έπειτα γίνεται η κατηγοριοποίηση των παιχνιδιών με βάση κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά όπως η πληροφόρηση και ο χρόνος των κινήσεων. Στη συνέχεια παρατίθενται τα διάφορα είδη στρατηγικών που μπορεί να ακολουθήσει ένας παίκτης κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Υπάρχουν καλές και κακές στρατηγικές όπως θα λέγαμε ανάλογα με τους κανόνες του παιχνιδιού και τους στόχους που έχει θέση ο παίκτης.

Ο αναγνώστης έχει την ευκαιρία να εισαχθεί στις έννοιες της κβαντικής θεωρίας παιγνίων και να κατανοήσει τις διαφορές μεταξύ κλασσικού και κβαντικού παιχνιδιού. Εισάγονται έννοιες όπως η κβαντική εμπλοκή η περιπλοκή καταστάσεων αλλά και η υπέρθεση αρχικών καταστάσεων.

Μια πολύ σημαντική έννοια που θα μας απασχολήσει κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης πτυχιακής είναι οι πληρωμές (payoffs). Όπως θα διαπιστώσουμε υπάρχουν διάφορα είδη παιχνιδιών τα οποία δεν άπτονται μόνο στον κλασσικό μας κόσμο αλλά και στον κβαντικό. Ο John Nash διατύπωσε ένα θεμελιώδες όπως θα διαπιστώσουμε θεώρημα την ισορροπία Nash.

Η ισορροπία Nash έχει καθοριστικό ρόλο σε πληθώρα κλασσικών αλλά και κβαντικών παιχνιδιών. Επηρεάζει το σύνολο των στρατηγικών των παικτών καθώς τους ωθεί να ακολουθήσουν μια πολύ συγκεκριμένη στρατηγική κατά την οποία ούτε κερδίζουν αλλά ούτε και χάνουν. Την λεγόμενη ισορροπία Nash. Όπως θα διαπιστώσουμε στα κεφάλαια 10,11 και 12 η ισορροπία Nash δεν ανάγεται μόνο στον κλασσικό κόσμο. Πληθώρα μελετών έχουν δημοσιευτεί από την επιστημονική κοινότητα οι

οποίες μελετούν την ισορροπία Nash σε χώρους Hilbert και Banach. Επίσης μελετούν την παραπάνω ισορροπία σε κβαντικές εκδοχές παιχνιδιών όπως το παιχνίδι Κορώνα- Γράμματα και το δίλημμα των φυλακισμένων.

Τέλος, μέσω της ισορροπίας Nash εξασφαλίζεται μια σύνδεση μεταξύ των κλασσικών και των κβαντικών παιχνιδιών. Είναι αξιοθαύμαστο το γεγονός ότι, η ισορροπία που φαίνεται να υπάρχει στα παιχνίδια του κλασσικού κόσμου μπορεί να μεταφερθεί και να βρεθεί εξίσου και σε παιχνίδια του κβαντικού κόσμου. Φυσικά υπάρχουν θεμελιώδεις διαφορές σε σχέση με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι παίκτες στα κβαντικά παιχνίδια με ισορροπία Nash, πάραυτα όμως το παιχνίδι είναι ίδιο.

Κεφάλαιο 2

Τι είναι παιχνίδι;

Ένα παιχνίδι απαρτίζεται από τα εξής στοιχεία :

- ▶ Παίκτες
- ▶ Αντικείμενα (αν είναι απαραίτητα)
- ▶ Κανόνες
- ▶ Στρατηγικές

Τα παραπάνω στοιχεία είναι τα τέσσερα βασικά στοιχεία που χρειάζονται για ένα παιχνίδι.

Κατά τη διάρκεια ενός παιχνιδιού οι παίκτες έχουν κάποιους σκοπούς προκειμένου να ολοκληρώσουν κάποιους στόχους. Ως επί το πλείστον ο μεγαλύτερος στόχος ενός παίκτη είναι η νίκη του παιχνιδιού. Πάραυτα όμως το παραπάνω δεν αποτελεί πανάκεια για όλους τους παίκτες. Καθένας από τους παίκτες έχει δικαίωμα να κυνηγήσει την επιτυχία με τα επιτρεπόμενα μέσα που του παρέχουν οι ειδικοί κανόνες του παιχνιδιού.

Ο παίκτης κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού καλείται να αντιμετωπίσει τους συμπαίκτες /αντίπαλους του μέσω μιας στρατηγικής ή ενός συνδυασμού στρατηγικών. Υπάρχουν φορές που οι στρατηγικές που επιλέγουν οι παίκτες δεν τους οδηγούν πουθενά ούτε σε νίκη αλλά ούτε και σε ήττα, τότε το παιχνίδι παραμένει σε μια ισορροπία που κανείς δεν χάνει και κανείς δεν κερδίζει.

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 6.3 δεν υπάρχουν μόνο κλασσικά παιχνίδια όπως τα ξέρουμε στον κόσμο στον οποίο ζούμε. Υπάρχουν παιχνίδια και σε άλλους πολυδιάστατους κόσμους όπως για παράδειγμα τα κβαντικά παιχνίδια. Ένα κλασσικό παιχνίδι απαρτίζεται από τις καταστάσεις και τα στοιχεία τα οποία περιγράψαμε παραπάνω. Ένα κβαντικό παιχνίδι εμπεριέχει όλα τα παραπάνω στοιχεία με κάποια ακόμα.

Όπως θα δούμε παρακάτω οι παίκτες ενός κβαντικού παιχνιδιού έχουν την ικανότητα να εφαρμόζουν στο παιχνίδι κινήσεις που είναι αδύνατες για κλασσικούς παίκτες. Επιπρόσθετα τα αντικείμενα με τα οποία μπορεί να παίζεται ένα παιχνίδι αν ανήκουν στο κβαντικό κόσμο έχουν και αυτά ιδιότητες που ένα κλασσικό αντικείμενο αδυνατεί να έχει. Ως αποτέλεσμα οι στρατηγικές, ο τρόπος παιξίματος και οι κανόνες ενός τέτοιου παιχνιδιού αλλάζουν σε σχέση με το πως θα παιζόταν ίσως και το ίδιο παιχνίδι στον κλασσικό κόσμο.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα παραπάνω ένα παιχνίδι αποτελείται από τέσσερα βασικά συστατικά. Το πιο σημαντικό από όλα, εκείνο που θα χαρακτηρίζαμε ως θεμελιώδες είναι οι κανόνες. Πάνω σ' εκείνους βασίζεται η πορεία ενός παιχνιδιού και οι στρατηγικές που θα ακολουθηθούν από τους παίκτες. Χωρίς τους κανόνες δεν θα μπορούσε ίσως να νοηθεί η έννοια του παιχνιδιού. [1]

Κεφάλαιο 3

Κατηγοριοποίηση των παιχνιδιών

1. Διαδοχικών ή ταυτόχρονων κινήσεων

Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα παιχνίδια σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Τα παιχνίδια διαδοχικών κινήσεων (*sequential*) και τα παιχνίδια ταυτόχρονων κινήσεων (*simultaneous*). Η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο παιχνιδιών είναι πολύ σημαντική. Είναι προφανές πως έχουμε δύο εντελώς διαφορετικά είδη παιχνιδιού με εντελώς διαφορετικό τρόπο παιξίματος.

Σε ένα διαδοχικό παιχνίδι ο παίκτης προσπαθεί να κάνει το επόμενο βήμα έχοντας γνώση των προηγούμενων και προσπαθώντας με τα υπάρχοντα δεδομένα να προβλέψει τις κινήσεις των αντιπάλων του. Σε ένα ταυτόχρονο όμως παιχνίδι οι παίκτες δεν επικεντρώνονται στο μέλλον αλλά στο παρόν, προσπαθώντας να προβλέψουν τις τωρινές κινήσεις των αντιπάλων τους.[2]

2. Συμμετρικό ή ασύμμετρο

Σε ένα συμμετρικό παιχνίδι, κάθε παίκτης είναι πανομοιότυπος και απόλυτα συμμορφωμένος με τους κανόνες του παιχνιδιού.[3] Επίσης, οι επιδόσεις κατά την εκτέλεση μιας συγκεκριμένης στρατηγικής είναι αποτέλεσμα της χρήσης άλλων στρατηγικών, ανεξάρτητα από την ταυτότητα των παικτών.

Συμπερασματικά, στα συμμετρικά παιχνίδια οι παίκτες ακολουθούν ίδιο ή παρόμοιο συνδυασμό συγκεκριμένων στρατηγικών. Πολλά από τα κοινά μελετημένα παιχνίδια είναι συμμετρικά όπως το δίλημμα των κρατουμένων. Αντίθετα, ασύμμετρα παιχνίδια είναι εκείνα όπου τα στρατηγικά σύνολα δεν είναι πανομοιότυπα μεταξύ των παικτών.

Ορισμός συμμετρικού παιχνιδιού δυο παικτών[4]

Ένα παιχνίδι ανάμεσα σε δύο παίκτες είναι συμμετρικό αν τα σύνολα στρατηγικών των παικτών είναι ίδια και οι πληρωμές τους είναι τέτοιες ώστε,

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2)$$

για κάθε $(s_1, s_2) \in S$.

3. Μηδενικού αθροίσματος ή μη μηδενικού αθροίσματος

Ως παιχνίδι μηδενικού-αθροίσματος θεωρούμε κάθε τέτοιο παιχνίδι όπου η νίκη ενός παίκτη, ισοδυναμεί με την ήττα των άλλων παικτών.

Στην πραγματική ζωή βέβαια σπάνια συναντιούνται τέτοιου είδους παιχνίδια. Ουσιαστικά, το άθροισμα των απολαβών όλων των παικτών ισούται με το μηδέν για οποιαδήποτε διαμόρφωση των στρατηγικών επιλογών τους (ειδική περίπτωση σταθερού αθροίσματος).

Το σκάκι για παράδειγμα, είναι ένα παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος καθώς ο παίκτης επωφελείται ίσο ποσό από τις απώλειες του αντιπάλου του. Αντίθετα, σε παιχνίδια μη μηδενικού αθροίσματος, η νίκη των παικτών δεν αντιστοιχεί σε απώλεια άλλου παίκτη όπως το δίλημμα των κρατουμένων.[5] [6]

4. Αβεβαιότητα και επίπεδο πληροφόρησης των παικτών

Σε ένα παιχνίδι όπως για παράδειγμα το σκάκι ο παίκτης μπορεί να προβλέψει όλες τις πιθανές κινήσεις ενός αντιπάλου μετά το πέρας της δικής του κίνησης. Στα περισσότερα όμως παιχνίδια η παραπάνω περιγραφή δεν υφίσταται καθώς υπάρχει **αβεβαιότητα** ή ακόμα και **ήμι-πληροφόρηση** ανάμεσα στους παίκτες.

Ας σκεφτούμε την αγορά ενός προϊόντος ως παιχνίδι. Έχουμε στην ουσία δυο ομάδες παικτών, τους αγοραστές και τους πωλητές. Ο αγοραστής καλείται να διαλέξει ανάμεσα σε μια πληθώρα προϊόντων με ανταγωνιζόμενα χαρακτηριστικά. Δεν είναι όμως σε θέση να γνωρίζει την ποιότητα των προϊόντων αυτών. Όταν λοιπόν, ο παίκτης δεν είναι σε θέση να γνωρίζει την επιρροή που ασκεί στις αποφάσεις του το εξωτερικό περιβάλλον με αποτέλεσμα να του προκαλείται αίσθημα αβεβαιότητας για την επιλογή των κινήσεων του, τότε έχουμε εξωτερική αβεβαιότητα. Ένα άλλου είδους αβεβαιότητας, είναι η **στρατηγική αβεβαιότητα**. Σε αυτή την περίπτωση, ο παίκτης δεν είναι σίγουρος για τον τρόπο που δρα και κινείται ο αντίπαλος του. Αν καμία από τις πα-

ραπάνω αβεβαιότητες δεν συναντάτε σε ένα παιχνίδι τότε έχουμε τέλεια πληροφόρηση αλλιώς έχουμε ατελή πληροφόρηση. Υπάρχει όμως και μια πιο πολύπλοκη περίπτωση, η ασύμμετρη πληροφόρηση. Οι παίκτες κατά την ασύμμετρη πληροφόρηση γνωρίζουν περισσότερες ή λιγότερες πληροφορίες από τους αντιπάλους τους. Παράλληλα οι παίκτες τείνουν να αποκρύπτουν την παραπάνω πληροφορία που κατέχουν με σκοπό τη νίκη.

Η απόκρυψη όμως των πληροφοριών δεν είναι πανάκεια, δεν είναι λίγες οι φορές όπου παίκτες αποκαλύπτουν εσκεμμένα μέρος των πληροφοριών που έχουν στην κατοχή τους με σκοπό τον εκφοβισμό ή ακόμα και τον αποπροσανατολισμό των αντιπάλων τους. Η αποκάλυψη πληροφοριών μπορεί να αποβεί για κάποιον παίκτη περισσότερο κερδοφόρα σε σχέση με την απόκρυψη τους. Σε ένα πόλεμο η επίδειξη δύναμης από ένα παίκτη και η πληροφόρηση των υπολοίπων για την κατοχή ενός δυνατού όπλου , μπορεί να οδηγήσει στην οπισθοχώρηση των υπολοίπων παικτών ή ακόμα και στην παραίτηση τους.

Τις περισσότερες φορές όμως , οι αντίπαλοι παίκτες χρειάζονται διαπιστευτήρια προκειμένου να μπορέσουν να αποδεχθούν και να αναγνωρίσουν το προβάδισμα που ισχυρίζεται πως έχει ο αντίπαλος τους. Είναι λοιπόν σαφές, πως οι παραπάνω ενημερωμένοι παίκτες πρέπει να προβούν σε κινήσεις που να αποδεικνύουν τα λεγόμενα τους. Οι κινήσεις αυτές ονομάζονται **σήματα** (signals) και η στρατηγική αυτή **σηματοφόρα** (signaling). Ταυτόχρονα πολλές φορές, οι παίκτες που κατέχουν λιγότερη πληροφορία επιστρατεύουν κινήσεις που είναι ικανές να επιβεβαιώσουν η ακόμα και να αποκαλύψουν την παραπάνω γνώση των αντιπάλων τους. Αυτή η στρατηγική ονομάζεται **παρακολούθηση** (screening) και οι μέθοδοι που ακολουθούνται ονομάζονται **συσκευές διαλογής**(screening devices).[5] [7][2]

Κεφάλαιο 4

Στρατηγική

Ως στρατηγική ορίζουμε τη μέθοδο με βάση την οποία οι παίκτες κάνουν τις επιλογές τους. Αναλυτικότερα, το αποτέλεσμα του παιχνιδιού βασίζεται στις κινήσεις των παικτών και στον αριθμό των γύρων ενός παιχνιδιού. Για παράδειγμα, σε ένα παιχνίδι με διαδοχικές κινήσεις, αν ένας παίκτης παίζει αργότερα στο παιχνίδι θα πρέπει να είναι σε θέση να ανακαλέσει ό,τι έχουν κάνει οι άλλοι παίκτες ή ακόμα και τις κινήσεις που έκανε ο ίδιος νωρίτερα, προκειμένου να προβεί στην επιλογή της επόμενης κίνησης.

Ως αποτέλεσμα, οι παίκτες πρέπει να δημιουργήσουν ένα ολοκληρωμένο σχέδιο για να επιβιώσουν στο παιχνίδι. Μια στρατηγική ορίζεται ως πλήρης εάν ένας παίκτης γνωρίζει τι να κάνει σε κάθε περίπτωση. Είναι γεγονός πως υφίστανται διάφορα ήδη στρατηγικών τα οποία μπορούν να οδηγήσουν έναν παίκτη στη νίκη, κάποιες από αυτές αναλύονται παρακάτω:[2]

1. Κυρίαρχη στρατηγική

Μια στρατηγική Ξ κυριαρχεί για ένα παίκτη εάν, για κάθε επιτρεπόμενη διαμόρφωση στρατηγικής άλλων παικτών, το Ξ του δίνει μια υψηλότερη απόδοση από οποιαδήποτε άλλη στρατηγική του ίδιου ή των υπολοίπων.[2]

2. Κυριαρχούμενη στρατηγική

Μια στρατηγική X θεωρείται κυριαρχούμενη για έναν παίκτη, αν υπάρχει μια άλλη στρατηγική Ψ τέτοια ώστε, για κάθε επιτρεπόμενη διαμόρφωση στρατηγικής των άλλων παικτών, η Ψ να του δίνει μια υψηλότερη απόδοση από τη X . [2]

3. Μικτή Στρατηγική

Μια μικτή στρατηγική για έναν παίκτη αποτελείται από μια τυχαία επιλογή που πρέπει να γίνει με συγκεκριμένες πιθανότητες, από τις αρχικά καθορισμένες καθαρές στρατηγικές.[2]

Αναλυτικότερα αν οι παίκτες ενός παιχνιδιού δρουν χωρίς να έχουν στο νου τους κάποια συγκεκριμένη τακτική (σύστημα) τότε κάνουμε λόγο για μικτή στρατηγική. Αυτού του είδους οι στρατηγικές καλύπτουν ένα ολόκληρο συνεχές φάσμα. Για παράδειγμα έχουμε τη στρατηγική X η X μπορεί να επιλεγεί από ένα παίκτη με πιθανότητα 1. Η στρατηγική Y τότε έχει πιθανότητα 0 για να επιλεγεί και αντίστροφα. Μόλις περιγράψαμε ,λοιπόν μια καθαρή στρατηγική. Σε μια μικτή στρατηγική όμως ο παίκτης μπορεί να επιλέξει μια στρατηγική μέσα στο πιθανό εύρος $[0,1]$. Αυτό σημαίνει πως ο παίκτης μπορεί να επιλέξει τη X με πιθανότητα $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ και ούτω καθεξής.

Οι πληρωμές όμως μιας μικτής στρατηγικής ορίζονται ως η αντίστοιχα σταθμισμένη πιθανότητα των μέσων όρων από τις αντίστοιχες καθαρές στρατηγικές.

Κεφάλαιο 5

Στρατηγική κυριαρχία

Στη θεωρία παιγνίων, η στρατηγική κυριαρχία είναι μια σύγκριση μεταξύ της στρατηγικής των παικτών, ανεξάρτητα από το πώς μπορεί να παίξουν οι αντίπαλοι του παίκτη. Πολλά απλά παιχνίδια μπορούν να λυθούν με στρατηγική κυριαρχία. Το αντίθετο, συμβαίνει σε παιχνίδια όπου μια στρατηγική μπορεί να είναι καλύτερη ή χειρότερη από μια άλλη στρατηγική για έναν παίκτη, ανάλογα με τον τρόπο που οι αντίπαλοι του παίκτη μπορούν να παίξουν.[2]

1. Απόλυτη Κυριαρχία σε παιχνίδια με καθαρές στρατηγικές

Υπάρχουν παιχνίδια όπου, η στρατηγική ενός παίκτη είναι ανώτερη από τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών. Οδηγεί λοιπόν, πάντοτε στη νίκη, ενάντια σε οποιαδήποτε άλλη στρατηγική κι' αν επιλέξουν οι άλλοι παίκτες. Η παραπάνω στρατηγική κυριαρχεί απόλυτα όλες τις άλλες.

Ορισμός [4]

Σε ένα παιχνίδι με στρατηγική μορφή G , θέτουμε $s'_i, s''_i \in S_i$ δύο στρατηγικές για τον παίκτη i . Η στρατηγική s'_i κυριαρχεί απόλυτα της στρατηγικής s''_i αν,

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s''_i, s_{-i})$$

Για κάθε στρατηγικό προφίλ $s_{-i} \in S_{-i}$.

Οι λογικοί παίκτες δεν θα επιλέξουν ποτέ μια απόλυτα κυρίαρχη στρατηγική, επειδή αυτού του είδους οι στρατηγικές δεν είναι ποτέ η καλύτερη απάντησή (best response), σε οποιαδήποτε άλλη στρατηγική των υπολοίπων παικτών. Πάραυτα, αφαιρώντας τις απόλυτα κυρίαρχες στρατηγικές από τον στρατηγικό χώρο μπορεί ανάμεσα στις εναπομείναντες στρατηγικές κάποια άλλη να γίνει κυρίαρχη. [4]

2. Σχετική κυριαρχία

Όπως είδαμε παραπάνω ένας λογικός παίκτης δεν θα επέλεγε ποτέ μια στρατηγική απόλυτης κυριαρχίας. Πάραυτα αν αφαιρεθούν μπορεί να επηρεάσουν την έκβαση του παιχνιδιού. Υπάρχουν στρατηγικές οι οποίες όμως δεν είναι ούτε "κακές" αλλά ούτε και οι "καλύτερες". Αυτές οι στρατηγικές ονομάζονται σχετικές(weak). Εφόσον δεν κυριαρχούν όμως απόλυτα θα πούμε πως απλά κυριαρχούν.

Ορισμός[4]

Σε ένα παιχνίδι με στρατηγική μορφή G , θέτουμε $s'_i, s''_i \in S_i$ δύο στρατηγικές για τον παίκτη i . Η στρατηγική s'_i κυριαρχεί της στρατηγικής s''_i αν,

$$u_i(s'_i, s_{-i}) \geq u_i(s''_i, s_{-i})$$

Για κάθε στρατηγικό προφίλ $s_{-i} \in S_{-i}$, όπου υπάρχει τουλάχιστον ένα s_i τέτοιο ώστε να ισχύει απόλυτα η ανισότητα.

Εξαλείφοντας μια σχετική στρατηγική δεν είναι δυνατό να εξασφαλισθεί πως θα επηρεάσει απαραίτητα την έκβαση του παιχνιδιού. Ο λόγος που συμβαίνει το παραπάνω είναι επειδή μπορεί να αποτελέσει καλή απάντηση για ένα παίκτη (best response). Όμως υπάρχουν τεχνικές δυσκολίες κατά τη διάρκειά απαλοιφής της. Καθώς η σειρά με την οποία απαλείφονται οι παραπάνω στρατηγικές μπορεί εν τέλη να επηρεάσει την έκβαση του παιχνιδιού.[4]

3. Απόλυτη Κυριαρχία σε παιχνίδια με μικτές στρατηγικές

Σε αυτή την ενότητα θα γενικεύσουμε την απόλυτη κυριαρχία που αναφέραμε παραπάνω σε παιχνίδια που κάνουν χρήση μικτών στρατηγικών. Για να αποδείξουμε πως μια καθαρή στρατηγική η οποία δίνει καλύτερη απάντηση (better response), έναντι όλων των καθαρών στρατηγικών των αντιπάλων.

Ορισμός[4]

Σε ένα παιχνίδι με στρατηγική μορφή G , με νNM προτιμήσεις, η καθαρή στρατηγική S_i είναι απόλυτα κυριαρχούμενη από τον παίκτη i αν υπάρχει μικτή στρατηγική $\sigma_i \in \Sigma_i$ τέτοια ώστε,

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

για κάθε $s_{-i} \in S_{-i}$. Η στρατηγική s_i είναι σχετικά κυριαρχούμενη αν υπάρχει σ_i του οποίου η ανισότητα στηρίζεται στη σχετική ανισότητα, η ανισότητα είναι απόλυτη για τουλάχιστον ένα s_{-i} .

Παρατήρηση 1[4]

Μια μικτή στρατηγική η οποία ορίζει θετική πιθανότητα σε μια κυριαρχούμενη καθαρή στρατηγική είναι και η ίδια κυριαρχούμενη (από οποιαδήποτε άλλη μικτή στρατηγική η οποία ορίζει μικρότερη πιθανότητα σε μια κυριαρχούμενη καθαρή στρατηγική).

Παρατήρηση 2[4]

Μια μικτή στρατηγική μπορεί να είναι απόλυτα κυριαρχούμενη ακόμα κι' αν ορίζει θετική πιθανότητα μόνο σε καθαρές στρατηγικές οι οποίες δεν είναι σχετικά κυριαρχούμενες.

Παρατήρηση 3[4]

Μια μη απόλυτα κυριαρχούμενη στρατηγική από οποιαδήποτε καθαρή στρατηγική, μπορεί να είναι απόλυτα κυριαρχούμενη από μια μικτή στρατηγική.

Κεφάλαιο 6

Εύρεση στρατηγικών κυριαρχίας με τη μέθοδο IEDS

Μια στρατηγική S_j κυριαρχείται από μια δεύτερη στρατηγική S_i , αν η τελευταία είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο μια στρατηγική S_j απέναντι σε οποιαδήποτε άλλη στρατηγική άλλου παίκτη.

Μια στρατηγική η οποία δεν μπορεί να κυριαρχηθεί από οποιαδήποτε άλλη στρατηγική ορίζεται ως μη-κυριαρχούμενη (undominated). Είναι χρήσιμο να ορισθεί ως «κακή» μια κυριαρχούμενη στρατηγική και ως «καλή» μια μη-κυριαρχούμενη στρατηγική.

Μια κυρίαρχη στρατηγική (dominant strategy) ανήκει μέσα στο σύνολο των μη-κυριαρχούμενων στρατηγικών, ως μια ειδική περίπτωση στρατηγικής. Στην ουσία η συγκεκριμένη στρατηγική κυριαρχεί έναντι οποιαδήποτε άλλης στρατηγικής, γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα πως είναι η «καλύτερη» στρατηγική. [8]

1. Iterated Elimination of Dominated Strategies (IEDS)

Ορίζεται το εξής παράδειγμα:

Παίκτης 1 Παίκτης 2	Αριστερά	Δεξιά
Πάνω	1,1	0,1
Μέση	0,2	1,0
Κάτω	0,-1	0,0

Για τον παίκτη 1 καμία από τις δύο πρώτες στρατηγικές δεν είναι κυρίαρχες μεταξύ τους, παράυτα όμως κυριαρχούν της τελευταίας, δηλαδή του παίκτη να κινηθεί προς τα κάτω. Είναι λοιπόν, κατανοητό και

σαφές πως ο παίκτης δεν θα έπαιζε μια κυριαρχούμενη στρατηγική διότι η βέλτιστη τεχνική που θα πρέπει να ακολουθήσει ένας παίκτης εάν θέλει να οδηγηθεί στη νίκη θα πρέπει να είναι μια κυρίαρχη στρατηγική. Επομένως παίζοντας μια, οποιαδήποτε κυρίαρχη στρατηγική ο παίκτης εξασφαλίζει την πληρωμή (payoff) η οποία θα δώσει προβάδισμα στον παίκτη οποιαδήποτε κι'αν είναι η κίνηση του αντιπάλου του. Επομένως ο παίκτης 1 ποτέ δεν θα πρέπει να παίζει κάτω αλλά ούτε και μέση ή πάνω.

Σε οποιαδήποτε παιχνίδι από τη στιγμή που είναι γνωστό πως ο ένας παίκτης δεν θα παίζει χρησιμοποιώντας μια «κακή» στρατηγική, τότε οι άλλοι παίκτες συνειδητοποιούν πως κάποιες από τις στρατηγικές τους είναι κυριαρχούμενες. Αυτό προκύπτει από το ότι ο παίκτης 2 για παράδειγμα, δεν θα πρέπει να ανησυχεί πλέον για το πως οι στρατηγικές του θα δράσουν απέναντι στις κυριαρχούμενες στρατηγικές των αντίπαλων του. Πάραυτα κάποιες στρατηγικές του δεύτερου παίκτη παρόλο που είναι καλές απέναντι σε κάποιες στρατηγικές του πρώτου παίκτη μπορεί στο τέλος να εξελιχθούν σε κακές στρατηγικές. Με αποτέλεσμα να ακολουθήσει ένας τρίτος γύρος αξιολόγησής των υπαρχόντων στρατηγικών και την ανακάλυψη νέων κακών στρατηγικών ίσως από άλλους παίκτες και ούτω καθεξής. Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, συμπεραίνουμε πως αν ήταν γνωστό πως ο παίκτης 1 δεν θα έπαιζε ποτέ κάτω στον παίκτη 2, τότε στρατηγική δεξιά θα ήταν προφανές πως είναι μια κυριαρχούμενη στρατηγική. Όμως ο παίκτης 1, δεν θα έπρεπε να ανησυχεί για το αν ο παίκτης 2 θα παίζει δεξιά. Επομένως θα διάλεγε εν τέλη να παίζει πάνω.

Η στρατηγική επιλογή (πάνω, αριστερά) θεωρείται πως προέκυψε από IEDS, ενώ το παιχνίδι θεωρείται κυριαρχούμενα επιλύσιμο (dominance solvable). Η παραπάνω πρόταση προσάπτεται σε οποιοδήποτε παιχνίδι μπορεί να εφαρμοστεί η παραπάνω λογική. Μια εφαρμογή της παραπάνω θεωρίας παρατηρείται στο παράδειγμα του περιέργου ζευγαριού. Η Φήλιξ και ο Όσκαρ μοιράζονται το ίδιο διαμέρισμα. Είναι σαφές όμως πως δεν ασπάζονται τις ίδιες απόψεις όσο αναφορά την καθαριότητα. Ως εκ τούτου η παραπάνω διαφορά παίζει σημαντικό ρόλο στο πότε και πόσο θα ασχοληθούν με το καθάρισμα του διαμερίσματος τους. Η βασική υπόθεση πάνω στην οποία στηρίζεται το παιχνίδι αυτό είναι η εξής, χρειάζονται τουλάχιστον τέσσερις ώρες προκειμένου να διατηρηθεί το διαμέρισμα καθαρό εβδομαδιαίως, επίσης χρειάζονται τουλάχιστον εννέα ώρες προκειμένου να υποθέσουμε πως το διαμέρισμα είναι κατοικήσιμο. Αν λιγότερες από εννέα ώρες αφιερωθούν τότε το διαμέρισμα θεωρείται βρώμικο. Υποθέτουμε λοιπόν πως κάθε άτομο μπορεί να διαθέσει είτε 3 ή 6 ή 9 ώρες για καθάρισμα.

Η φίληξ και ο Όσκαρ συμφωνούν λοιπόν, πως ένα διαμέρισμα αξίζει δυο στο δείκτη χρησιμότητας. Διαφωνούν όμως στο τρόπο με τον οποίο πρέπει να βαθμολογείται σε αξία η καθαριότητα του διαμερίσματος. Η Φήλιξ πιστεύει πως ένα καθαρό διαμέρισμα αξίζει 10 μονάδες χρησιμότητας ενώ ο Όσκαρ πιστεύει πως αξίζει μόνο 5 μονάδες. Επίσης διαφωνούν για το πως μπορεί να αξιολογηθεί η δυσάρεστη κατάσταση που προκαλεί

ένα βρώμικο διαμέρισμα. Η Φήλιξ υποστηρίζει πως αναλογούν -10 μονάδες ενώ ο Όσκαρ το βαθμολογεί με -5. Το πλήρωμα (payoff) κάθε ατόμου υπολογίζεται ως εξής, από τη βαθμολογία που έχει βάλει το άτομο σε κάθε θέμα αφαιρείται το πόσο εργάστηκε. Αν για παράδειγμα έχουμε ένα καθαρό διαμέρισμα όπου για το παραπάνω αποτέλεσμα η Φήλιξ εργάστηκε 6 ώρες, τότε το payoff αντιστοιχεί σε 4 ενώ παράλληλα για 6 ώρες του Όσκαρ είναι -1. Επομένως προκύπτει ο εξής πίνακας.[8]

Όσκαρ Φήλιξ	3 ώρες	6 ώρες	9 ώρες
3 ώρες	-13,-8	-1,-4	7,-4
6 ώρες	-4, -1	4, -1	4,-4
9 ώρες	1, 2	1, -1	1,-4

Σημειώνουμε λοιπόν εδώ πως ο Όσκαρ θεωρεί υπερβολικές τις εννέα ώρες καθαρισμού. Επομένως, η παραπάνω στρατηγική κυριαρχείται από τις έξι ώρες. Επομένως το παιχνίδι παίρνει την εξής μορφή:

Όσκαρ Φήλιξ	3 ώρες	6 ώρες
3 ώρες	-13,-8	-1,-4
6 ώρες	-4, -1	4, -1
9 ώρες	1, 2	1, -1

Τώρα η στρατηγική των τριών ωρών κυριαρχείται από την στρατηγική της Φήλιξ. Η Φήλιξ δίνει μεγάλη αξία στην καθαριότητα ως συνέπεια δεν θα δούλευε ποτέ μόνο τρεις ώρες. Επομένως η ελάχιστη εργασία της Φήλιξ είναι έξι ώρες. Άρα ο πίνακας έχει την εξής μορφή πλέον:

Όσκαρ Φήλιξ	3 ώρες	6 ώρες
6 ώρες	-4, -1	4, -1
9 ώρες	1, 2	1, -1

Παρατηρείται λοιπόν με βάση τα παραπάνω πως η στρατηγική των έξι ωρών κυριαρχείται για τον Όσκαρ καθώς η Φήλιξ προτίθεται να δουλέψει παραπάνω ώρες ούτως ή άλλως. Επίσης είναι σαφές πως η Φήλιξ κατέχει ήδη έξι ώρες. Επομένως μέσα από τον IEDS βλέπουμε ότι η Φήλιξ εργάζεται το μέγιστο εννέα ώρες και ο Όσκαρ εργάζεται για τουλάχιστον τρεις ώρες.[8]

Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Κανένας ορθολογικός παίκτης δεν θα παίξει μια κυριαρχημένη στρατηγική αλλά θα προτιμούσε να παίξει μία από τις αβάσιμες

στρατηγικές του. Ένας λογικός παίκτης δεν θα περίμενε από τους αντιπάλους του να παίξουν μια κυριαρχημένη στρατηγική.

- Η εξάλειψη κυριαρχούμενων στρατηγικών μπορεί να οδηγήσει σε μια αλυσιδωτή αντίδραση που περιορίζει διαδοχικά τον τρόπο με τον οποίο μια ομάδα λογικών παικτών θα ενεργήσει. Αν υπάρχει τελικά μια μοναδική πρόβλεψη, ονομάζεται λύση IEDS.
- Όταν υπάρχουν πολλοί γύροι εξάλειψης που εμπλέκονται σε μια λύση IEDS, υπάρχει λόγος να ανησυχίας σχετικά με την ορθότητα της πρόβλεψης του.[8]

Η μέθοδος IEDS βασίζεται κυρίως στη λογική των παικτών, προκειμένου να αποκλειστούν κάποιες στρατηγικές. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5, δεν αποτελεί ορθή τακτική πάντα η απαλοιφή στρατηγικών, διότι επηρεάζει το αποτέλεσμα της ανάλυσης IEDS. Συνεπώς, ακόμα κι'αν η ισορροπία μιας στρατηγικής είναι μοναδική(αν υπάρχει), η παραπάνω μέθοδος δεν είναι αποτελεσματική. Καθώς πολλές από τις στρατηγικές επιβιώνουν τον αποκλεισμό με αποτέλεσμα να μην υπάρχει ισορροπία.

Συνάγεται, λοιπόν το συμπέρασμα, πως το μοντέλο λύσης IEDS, αφήνει πολλά παιχνίδια "άλυτα". Από την άποψη πως δεν είναι προβλέψιμες ακόμα και μετά την ανάλυση οι κινήσεις των παικτών. Εν αντίθεση, η μέθοδος εύρεσης της ισορροπίας Nash, έχει το πλεονέκτημα πως αποδίδει αποτελέσματα για ένα μεγάλο εύρος παιχνιδιών.[4]

Κεφάλαιο 7

Βασικές έννοιες

1. πληρωμές

Ως πληρωμή ορίζουμε το στόχο, ο οποίος είναι συνήθως αριθμητικός και ένας παίκτης κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού έχει σκοπό να τον μεγιστοποιήσει.

Δίνουμε σε κάθε παίκτη μια πλήρη αριθμητική κλίμακα. Την οποία στη συνέχεια συγκρίνουμε με όλα τα πιθανά και λογικά αποτελέσματα (εκβάσεις) του παιχνιδιού. Τα παραπάνω αποτελέσματα αντιστοιχούν σε κάθε διαθέσιμο συνδυασμό επιλογών(στρατηγικών) όλων των παικτών. Ο αριθμός ο οποίος προκύπτει από τον παραπάνω συνδυασμό σχετίζεται με κάθε πιθανό αποτέλεσμα. Αυτός ο αριθμός ονομάζεται πληρωμή (payoff).[2]

2. Διπλωματία

Ως διπλωματία μπορούμε να ορίσουμε την τακτική -στρατηγική την οποία εφαρμόζει ένας παίκτης προκειμένου να εξαλείψει μια απειλή. Η παραπάνω απειλή δημιουργεί ρίσκο αλλά όχι απαραίτητα τη βεβαιότητα για μια άσχημη έκβαση για παράδειγμα ήττα.

Σκοπός για τον παίκτη που δρα διπλωματικά είναι, ο αντίπαλος παίκτης αφηφίσει την επιθυμητή για εκείνων ενέργεια που θα τον οδηγήσει για παράδειγμα σε νίκη.Επομένως να μην δράση με ορθό τρόπο, πράγμα επιθυμητό από τον παίκτη που εφαρμόζει διπλωματία. Στη συνέχεια αυξάνεται βαθμιαία ο κίνδυνος για τον αντίπαλό παίκτη έως ότου ενδώσει(παραιτηθεί) ή συμβεί το κακό όπως θα λέγαμε για εκείνων αποτέλεσμα(ήττα).[2]

3. Κβαντικά παιχνίδια σε σχέση με τα κλασικά παιχνίδια

Η θεωρία κβαντικών παιχνιδιών είναι μια επέκταση της κλασικής θεωρίας παιγνίων. Πάραυτα όμως, τα παιχνίδια στην κβαντική τους έκδοση έχουν διαφορετικούς κανόνες. Ως αποτέλεσμα οι στρατηγικές των παικτών αλλάζουν και παρόλο που το παιχνίδι κινείται πάνω σε περίπου ίδια πλαίσια με το κλασσικό, είναι εντελώς διαφορετικό. Κάποιες από τις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στα κβαντικά και στα κλασσικά παιχνίδια είναι οι εξής:[9]

- ▶ Υπέρθεση αρχικών καταστάσεων
- ▶ Κβαντική εμπλοκή αρχικών καταστάσεων
- ▶ Υπέρθεση στρατηγικών που θα χρησιμοποιηθούν στις αρχικές καταστάσεις.

Όπως θα δούμε παρακάτω μπορεί οι αρχικές καταστάσεις να είναι διαφορετικές για ένα κβαντικό παιχνίδι, αυτό συμβαίνει όμως επειδή και ο χώρος στον οποίο παίζουν οι παίκτες δεν είναι ο ίδιος. Σε ένα κλασσικό παιχνίδι οι παίκτες παίζουν σε κλασσικούς διανυσματικούς χώρους. Σε ένα κβαντικό παιχνίδι όμως οι παίκτες έχουν τη δυνατότητα να παίζουν και σε χώρους όπως οι χώροι Hilbert και Banach όπου ένας κλασσικός παίκτης σαν εμάς είναι αδύνατο να παίξει. Ως αποτέλεσμα, οι κβαντικοί παίκτες να έχουν περισσότερες επιλογές κινήσεων και στρατηγικών. Είναι λοιπόν προφανές πως με αυτό τον τρόπο καθίσταται αδύνατο για έναν κλασσικό παίκτη να νικήσει έναν κβαντικό.

Παρακάτω θα αναλύσουμε δύο πολύ βασικά παιχνίδια του κλασσικού και του κβαντικού κόσμου. Το παιχνίδι των φυλακισμένων και το παιχνίδι Κορώνα γράμματα. Όπως θα δούμε είναι αδύνατο ο κλασσικός παίκτης του παιχνιδιού κορώνα γράμματα να νικήσει τον κβαντικό.

Μελετώντας τα κβαντικά παιχνίδια αντιλαμβανόμαστε και ανακαλύπτουμε εκδοχές του κόσμου που δεν θα μπορούσαμε να αντιληφθούμε στον συμβατικό κόσμο τον οποίο ζούμε.

4. Παιχνίδια για πολλούς παίκτες

Η εισαγωγή της κβαντικής θεωρίας στα παιχνίδια για πολλούς παίκτες επιτρέπει έναν νέο τύπο «στρατηγικής ισορροπίας» που δεν υπάρχει στα παραδοσιακά παιχνίδια. Η εμπλοκή των επιλογών των παικτών μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα μια σύμβαση, εμποδίζοντας τους παίκτες να επωφεληθούν από την προδοσία άλλου παίκτη.[10]

5. Υπέρθεση αρχικής κατάστασης

Η μεταφορά πληροφοριών που εμφανίζεται κατά τη διάρκεια ενός παιχνιδιού μπορεί να θεωρηθεί ως μια φυσική διαδικασία.

Στην απλούστερη περίπτωση ενός κλασικού παιχνιδιού μεταξύ δύο παικτών με δύο στρατηγικές το καθένα, οι δύο παίκτες μπορούν να χρησιμοποιήσουν μια κίνηση («0» ή «1») για να μεταφέρουν την επιλογή της στρατηγικής τους.

Ένα δημοφιλές παράδειγμα τέτοιου παιχνιδιού είναι το δίλημμα των φυλακισμένων, όπου κάθε ένας από τους καταδίκους μπορεί είτε να συνεργαστεί είτε να παραλείψει την συνεργασία: Να αρνηθεί να ομολογήσει(**παράκρηψη γνώσης**) ή να ομολογήσει(**αποκάλυψη**) ποιος είναι ο παίκτης ο οποίος διέπραξε το έγκλημα.

Στην κβαντική έκδοση του παιχνιδιού, η κίνηση αυτή, αντικαθίσταται από ένα *qubit*. Το *qubit* είναι μια κβαντική υπέρθεση δύο ή περισσότερων καταστάσεων βάσης. Στην περίπτωση ενός παιχνιδιού δύο στρατηγικών αυτό μπορεί να υλοποιηθεί φυσικά με τη χρήση μιας οντότητας όπως το ηλεκτρόνιο. Το οποίο έχει μια υπερτιμημένη κατάσταση περιστροφής, με τις βασικές καταστάσεις να είναι $+\frac{1}{2}$ (συν μισό) και $-\frac{1}{2}$ (μείον μισό). Κάθε μία από τις καταστάσεις περιστροφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αντιπροσωπεύει καθεμία από τις δύο στρατηγικές που είναι διαθέσιμες στους παίκτες. Όταν γίνεται μέτρηση στο ηλεκτρόνιο, καταρρέει σε μία από τις βασικές καταστάσεις, μεταφέροντας έτσι τη στρατηγική που χρησιμοποιείται από το *qubit*.^[11]

6. Περιπλεγμένες (entangled) αρχικές καταστάσεις

Το σύνολο των *qubit* που παρέχεται αρχικά σε κάθε παίκτη (που χρησιμοποιείται για να μεταβιβάσει την επιλογή στρατηγικής) μπορεί να εμπλακεί.

Για παράδειγμα, ένα ζευγάρι *qubit* υποδηλώνει ότι μια λειτουργία που εκτελείται σε ένα από τα *qubit*, επηρεάζει και το άλλο *qubit*, αλλάζοντας έτσι τις αναμενόμενες αποδόσεις του παιχνιδιού.

7. Υπέρθεση στρατηγικών που χρησιμοποιούνται στις αρχικές καταστάσεις

Ο στόχος ενός παίκτη σε ένα παιχνίδι είναι να επιλέξει μια στρατηγική. Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης πρέπει να επιλέξει μεταξύ αναστρέφοντάς το κομμάτι στην αντίθετη κατάσταση ή αφήνοντας την τρέχουσα κατάσταση του ανέπαφη. Σαν το κλασικό παιχνίδι αναστροφής του νομίσματος(ρίψη

νομίσματος). Όταν επεκταθεί στο κβαντικό τομέα αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης μπορεί να περιστρέψει το *qubit* σε μια νέα κατάσταση, αλλάζοντας έτσι τα πλάτη πιθανότητας κάθε μίας από τις βασικές καταστάσεις. Τέτοιες πράξεις επί των *qubit* πρέπει να είναι ενιαίοι μετασχηματισμοί στην αρχική κατάσταση του *qubit*. Αυτό είναι διαφορετικό από την κλασική διαδικασία που επιλέγει τις στρατηγικές με στατιστικές πιθανότητες.

Ο Mayer, παρουσίασε για πρώτη φορά την κβαντική έκδοση του παιχνιδιού της ρίψης του νομίσματος. Το οποίο θα δού αναλυτικά σε επόμενα κεφάλαια. Στο αρχικό παιχνίδι οι δύο παίκτες ονομάζονται *Q* και *Picard* (από μια δημοφιλή τηλεοπτική σειρά). Ο *Picard* περιορίζεται σε κλασικές στρατηγικές ενώ ο *Q* είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει κβαντικές στρατηγικές. Ως αποτέλεσμα, ο *Q* είναι σε θέση να εφαρμόσει μετασχηματισμούς σε κάθε δυνατή κατάσταση του παιχνιδιού. Ο Mayer προσδιορίζει μια στρατηγική νίκης για τον *Q* που βασίζεται στην εφαρμογή του μετασχηματισμού Hadamard. Ο *Picard*, από την άλλη πλευρά, μπορεί είτε να αφήσει το κέρμα ως έχει είτε να το αναστρέψει, παρόλα αυτά είναι προκαθορισμένο πως θα χάσει σε κάθε περίπτωση.[12]

Με το παραπάνω παράδειγμα γίνεται αντιληπτή η συμασία της υπέρθεσης των καταστάσεων καθώς μπορεί να καθορίσει σημαντικά την έκβαση του παιχνιδιού.

8. Κβαντική εμπλοκή

Η κβαντική εμπλοκή είναι ένα φυσικό φαινόμενο που συμβαίνει όταν παράγονται ζεύγη ή ομάδες σωματιδίων ή αλληλεπιδρούν με τέτοιο τρόπο ώστε η κβαντική κατάσταση κάθε σωματιδίου να μην μπορεί να περιγραφεί ανεξάρτητα από τα άλλα, ακόμη και όταν τα σωματίδια διαχωρίζονται από μεγάλη απόσταση. η κβαντική κατάσταση πρέπει να περιγραφεί για το σύστημα ως σύνολο. Το 1964 ο Bell, δέχθηκε το συμπέρασμα EPR, το οποίο υποθέτει ότι:

- ▶ τα αποτελέσματα της μέτρησης καθορίζονται από τις ιδιότητες που τα σωματίδια φέρουν πριν και ανεξάρτητα από τη μέτρηση ('ρεαλισμός')
- ▶ τα αποτελέσματα που λαμβάνονται σε μία θέση είναι ανεξάρτητα για οποιεσδήποτε ενέργειες που εκτελούνται σε διαχωρισμό χώρου ('Τοποθεσία')
- ▶ Η ρύθμιση των τοπικών συσκευών είναι ανεξάρτητη από τις κρυφές μεταβλητές που καθορίζουν το τοπικά αποτελέσματα ('ελεύθερη βούληση').

Ο Bell απέδειξε ότι οι παραπάνω παραδοχές επιβάλλουν περιορισμούς στους στατιστικούς συσχετισμούς σε πειράματα που αφορούν διμερή

συστήματα με τη μορφή των ανισοτήτων Bell. Στη συνέχεια έδειξε ότι οι πιθανότητες για τα αποτελέσματά που προκύπτουν όταν μετρούνται κατάλληλα κάποια επιλεγμένη κβαντική κατάσταση παραβιάζουν την ανισότητα Bell.[13][14] Οι μετρήσεις των φυσικών ιδιοτήτων, όπως η θέση, η ορμή, η περιστροφή και η πόλωση, που πραγματοποιούνται σε μπλεγμένα σωματίδια, συσχετίζονται κατάλληλα. Για παράδειγμα, εάν ένα ζεύγος σωματιδίων παράγεται με τέτοιο τρόπο ώστε η ολική περιστροφή του να είναι γνωστό ότι είναι μηδέν, και ένα σωματίδιο βρέθηκε να έχει περιστροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού σε έναν συγκεκριμένο άξονα, η περιστροφή του άλλου σωματιδίου, μετρούμενη στον ίδιο άξονα, θα βρεθεί ότι είναι προς τα αριστερά, όπως αναμένεται λόγω της εμπλοκής τους. [15]

Εντούτοις, αυτή η συμπεριφορά παράγει παράδοξα αποτελέσματα: οποιαδήποτε μέτρηση μιας ιδιότητας ενός σωματιδίου μπορεί να θεωρηθεί ότι ενεργεί πάνω σε αυτό το σωματίδιο (π.χ., με κατάρρευση ενός αριθμού υπερπληρωμένων καταστάσεων) και θα αλλάξει την αρχική κβαντική ιδιότητα με κάποια άγνωστη ποσότητα. και στην περίπτωση των πλεγμένων σωματιδίων, μια τέτοια μέτρηση θα είναι στο εμπλεκόμενο σύστημα στο σύνολό του. Φαίνεται λοιπόν ότι ένα σωματίδιο ενός ζεύγους «ξέρει» τι μέτρηση έχει πραγματοποιηθεί από την άλλη και με ποιο αποτέλεσμα, αν και δεν υπάρχει γνωστό μέσο για την επικοινωνία τέτοιων πληροφοριών μεταξύ των σωματιδίων τα οποία κατά το χρόνο της μέτρησης μπορεί να διαχωριστούν από αυθαίρετα μεγάλες αποστάσεις.[16]

9. Επαναλαμβανόμενο παιχνίδι

Στη θεωρία παιγνίων, ένα επαναλαμβανόμενο παιχνίδι είναι ένα εκτεταμένο παιχνίδι με μορφή που αποτελείται από μια σειρά επαναλήψεων κάποιου βασικού παιχνιδιού (που ονομάζεται σταδιακό).

Το παιχνίδι σταδίων είναι συνήθως ένα καλά μελετημένο παιχνίδι 2 ατόμων. Τα επαναλαμβανόμενα παιχνίδια αποτυπώνουν την ιδέα ότι ένας παίκτης θα πρέπει να λάβει υπόψη το αντίκτυπο της τρέχουσας δράσης του στις μελλοντικές ενέργειες άλλων παικτών. Αυτό το αντίκτυπο ονομάζεται **φήμη**. Παιχνίδι **μονής φάσης** ή αλλιώς παιχνίδι **single shot** είναι ονόματα για μη επαναλαμβανόμενα παιχνίδια.[17]

10. Πεπερασμένο παιχνίδι (finite game)

Ένα παιχνίδι αποτελούμενο από n -άτομα είναι ένα σύνολο n -παικτών ή θέσεων, συ σχετιζόμενο το καθένα με ένα πεπερασμένο σύνολο **καθαρών στρατηγικών** (pure strategies).

Αντιστοιχεί σε κάθε παίκτη I μια συνάρτηση πληρωμής P_i η οποία

απεικονίζει το σύνολο όλων των n -Πλειάδων καθαρών στρατηγικών στους πραγματικούς αριθμούς. Χρησιμοποιώντας τον όρο n -πλειάδα, εννοείται ένα σύνολο n -στοιχείων, με καθένα από αυτά να συνδέεται με ένα διαφορετικό παίκτη.[18]

Κεφάλαιο 8

Ισορροπία Nash

Στη θεωρία των παιχνιδιών, η ισορροπία Nash, που πήρε το όνομα της από τον Αμερικανό μαθηματικό John Forbes Nash Jr., είναι μια ιδέα λύσης για ένα μη συνεργατικό παιχνίδι που περιλαμβάνει δύο ή περισσότερους παίκτες. Όπου κάθε παίκτης υποτίθεται ότι γνωρίζει τις στρατηγικές ισορροπίας των άλλων παικτών και κανένας παίκτης δεν έχει τίποτα να κερδίσει αλλάζοντας μόνο τη δική του στρατηγική. Αν κάθε παίκτης έχει επιλέξει μια στρατηγική κανένας παίκτης δεν μπορεί να ωφεληθεί αλλάζοντας στρατηγικές, ενώ οι άλλοι παίκτες παραμένουν αμετάβλητοι, τότε το τρέχον σύνολο στρατηγικών επιλογών και οι αντίστοιχες αποδόσεις(πληρωμές) αποτελούν ισορροπία Nash.[7]

Η ισορροπία Nash είναι μία από τις θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας των παιχνιδιών. Η πραγματικότητα της ισορροπίας Nash ενός παιχνιδιού μπορεί να δοκιμαστεί χρησιμοποιώντας πειραματικές οικονομικές μεθόδους. Για να συνοψίσουμε, η ισορροπία Nash είναι μια διαμόρφωση στρατηγικών τέτοια, ώστε η στρατηγική κάθε παίκτη να είναι καλύτερη γι αυτόν, λαμβάνοντας υπόψη εκείνες των άλλων παικτών.[19]

Σύμφωνα με τον John Nash υπάρχει ισορροπία και σε μη συνεργατικά παιχνίδια αρκεί κάθε παίκτης να ενεργεί μεμονωμένα από τους υπολοίπους. Δηλαδή χωρίς καμία συνεργασία ή επικοινωνία με άλλους παίκτες. Η έννοια του σημείου ισορροπίας *equilibrium*, αποτελεί το βασικό πυλώνα της θεωρίας. Τα παραπάνω αποτελούν μια γενίκευση της ιδέας της λύσης ενός παιχνιδιού μηδενικού αθροίσματος δύο ατόμων. Αποδεικνύεται λοιπόν, παρακάτω πως το σύνολο των σημείων ισορροπίας ενός παιχνιδιού δύο ατόμων με μηδενικό άθροισμα είναι απλά το σύνολο όλων των ζευγών αντίθετων 'Βέλτιστων στρατηγικών'.

Συνεπώς, παρακάτω παρουσιάζεται εν συντομία πως ένα πεπερασμένο μη συνεργατικό παιχνίδι έχει πάντα τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας. Βέβαια υπάρχουν παιχνίδια που έχουν παραπάνω από μια ισορροπία Nash και άλλα που δεν έχουν καμία. Σε περίπτωση ύπαρξης παραπάνω από μιας ισορροπίας η επιλογή ενός σημείου προαπαιτεί ένα είδος προσ-συνεννόησης μεταξύ των παικτών.[20]

Η εύρεση της ισορροπίας Nash μπορεί να επιτευχθεί με τους εξής τρόπους:

- ▶ Για ορισμένο πλήθος παικτών και κινήσεων είναι δυνατόν να εφαρμοστεί η λεγόμενη μέθοδος ωμής βίας (brute force) όπου ελέγχονται ένας προς ένας όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί των πιθανών προφίλ.
- ▶ Με τη χρήση συναρτήσεων βέλτιστης απόκρισης (best response functions). Αποδείχθηκε πρόσφατα πως μάλλον είναι μη αναμενόμενο να υπάρξει αποτελεσματικός αλγόριθμος για την εύρεση μιας ισορροπίας Nash σε πολυωνυμικό χρόνο για επαναλαμβανόμενα παιχνίδια.[?]

1. Καλύτερη απάντηση - best response

Πρὶν περάσουμε σε παραδείγματα και ορισμούς της ισορροπίας Nash θα ορίσουμε την έννοια της καλύτερης απάντησης ή απόκρισης που ήδη έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια αλλά θα τη συναντήσουμε και στα επόμενα.

Έστω πως οι παίκτες ενός παιχνιδιού είναι λογικοί. Τότε έχουν την καλύτερη απάντηση, αν η στρατηγική που θα επιλέξουν τους αποφέρει τη μέγιστη τιμή πληρωμής. Η παραπάνω στρατηγική ονομάζεται καλύτερη απάντηση.

ορισμός[4]

Υποθέτουμε πως ο παίκτης i έχει κάποιες πεπιθήσεις $s_i \in S_i$ για τις στρατηγικές που παίζουν οι άλλοι παίκτες. Η στρατηγική $s_i \in S_i$ ενός παίκτη i είναι η καλύτερη απάντηση αν,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s'_i, s_{-i})$$

για κάθε $s'_i \in S_i$.

Η στρατηγική αντιστοιχία καλύτερης απάντησης, $BR_i(S_{-i})$, ως σύνολο καλύτερο στρατηγικών απαντήσεων, ενός παίκτη i αντιστοιχεί στις πεπιθήσεις S_{-i} . Η παραπάνω αντιστοιχία αποτελεί σύνολο τιμών. Επομένως μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από μια καλύτερες απαντήσεις για κάθε πεπιθήση ενός παίκτη i . [4]

2. Ορισμοί

Ορίζουμε ως E_n το σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών που έχει στη διάθεση του ένας παίκτης. Το καρτεσιανό γινόμενο αυτών των στρατηγικών ορίζεται ως E . Ένα απλό στοιχείο του παραπάνω συνόλου

είναι το εξής: $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ και χαρακτηρίζεται ως προφίλ καθαρής στρατηγικής (pure strategy profile). Όπου e_n η καθαρή στρατηγική κάθε παίκτη n . [21]

ορισμός[21]

Μια μικτή στρατηγική ενός παίκτη n είναι ένας τυχαίος συνδιασμός με βάση τις καθαρές στρατηγικές ενός παίκτη n .

παρατήρηση[21]

- Μια απο τις n μικτές στρατηγικές ενός παίκτη συμβολίζεται με σ_n και το σύνολο n των μικτών στρατηγικών όλων των παικτών συμβολίζεται με Σ_n .
- Επομένως $\sigma_n = \sigma(e_n^1), \sigma(e_n^2), \dots, \sigma(e_n^{\kappa_n})$ όπου κ_n είναι ο αριθμός των καθαρών στρατηγικών ενός παίκτη n και $\sigma_n(e_n^i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, \kappa_n$ και $\sum_{i=1}^{\kappa_n} \sigma(e_n^i) = 1$.
- Το καρτεσιανό γινόμενο $\Sigma = \Sigma_1 \dots \Sigma_n$ είναι το σύνολο όλων των μικτών στρατηγικών προφίλ.
- Επομένως το σύνολο των μεικτών στρατηγικών που έχει οριστεί για κάθε παίκτη είναι η κατανομή πιθανότητας που έχει τεθεί με βάση το σύνολο των καθαρών στρατηγικών.

ορισμός[21]

Μια n -διάσταση simplex μέθοδος ορίζεται απο $n+1$ σημεία $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ μέσα σε χώρο $\mathbb{R}^2$, $p \geq n$, συμβολίζονται με $\langle X_0, X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$ και ορίζονται απο το σύνολο

$$\left\{ \mathbb{R}^p : x = \sum_{j=0}^n \theta_j = 1, \theta_j \geq 0 \right\}$$

παρατήρηση[21]

- Η simplex είναι μη εκφυλισμένη αν τα n διανύσματα $X_1 - X_0, \dots, X_n - X_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Αν $X = \sum_{j=0}^n \theta_j X_j$, οι αριθμοί $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ καλούνται ως βαρυκεντρικές συντεταγμένες του X .
- Η βαρύκεντρος της simplex $\langle X_0, X_1, \dots, X_n \rangle$ είναι το σημείο όπου όλες οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ισούνται με $(n+1)^{-1}$

ορισμός[21]

Καλείται $U_n(\sigma)$ η επιθυμητή συνάρτηση πληρωμής ενός παίκτη n συσχετισμένη με τα προφίλ μικτής στρατηγικής $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

ορισμός[21]

Η ισορροπία Nash ενός παιχνιδιού είναι προφίλ μικτών στρατηγικών $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ όπως για $n = 1, 2, \dots, N$ για κάθε e_n και e'_n στο E_n , αν $\sigma_n(e_n) \geq 0$ τότε,

$$U_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, e_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_N) \geq U_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, e'_n, \sigma_{n+1}, \dots, \sigma_N)$$

παρατήρηση[21]

- Η ισορροπία είναι ένα προφίλ από μικτές στρατηγικές τέτοιες ώστε ο παίκτης να γνωρίζει τι στρατηγικές οι άλλοι παίκτες θα διαλέξουν, κανείς παίκτης δεν έχει όφελος να ακολουθήσει άλλο στρατηγικό μονοπάτι απο τη στιγμή που η πληρωμή (payoff) δεν βελτιώνεται μόνο μέσω μια μονομερούς αλλαγής μιας στρατηγικής.
- Η ισορροπία Nash προκαλεί μια απαραίτητη συνθήκη στρατηγικής σταθερότητας

Θεώρημα(Kakutani)

$M \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό και μη καινό σύνολο. Κάθε απεικόνιση $F \rightarrow M$ με κλειστό γράφημα και κυρτές, μη κενές τιμές F έχει ένα σταθερό σημείο. [22][21][23]

Θεώρημα (Nash)

Μια μικτή εκδοχή για κάθε πεπερασμένο παιχνίδι έχει τουλάχιστον μια στρατηγική ισορροπία. [21]

Για την απόδειξη της ύπαρξης της παραπάνω ισορροπίας αρκεί πως η στρατηγική που χρησιμοποιεί ο παίκτης για να δώσει την καλύτερη απάντηση εμπεριέχει σταθερό σημείο. Σύμφωνα με το θεώρημα του Kakutani υπάρχει σταθερό σημείο για κάθε αντιστοιχία στρατηγικών από ένα κυρτό και σταθερό υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου αρκεί να τηρούνται δύο προϋποθέσεις. [21][24]

- Η εικόνα κάθε συνόλου πρέπει να είναι κυρτή.
- Ο γράφος αντιστοιχίας πρέπει να είναι κλειστός. Δηλαδή το σύνολο των (x, y) όπου y είναι η εικόνα του x .

3. Καθαρή ισορροπία Nash

ορισμός 1 (Nash)[4]

Το θεώρημα Nash είναι ένα προφίλ στρατηγικών $(s_i^*, S_{-i}^*) \in S$ σε μια καθαρή στρατηγική ισορροπία Nash, αν και μόνο αν, $s_i^* \in BR_i(S_{-i}^*)$ για κάθε $i \in I$.

ορισμός 2 (Nash)[4]

Το στρατηγικό προφίλ (s_i^*, S_{-i}^*) είναι μια καθαρή ισορροπία Nash, αν και μόνο αν, $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$ για κάθε $i \in I$ και κάθε $s_i \in S_i$.

Είναι αξιοσημείωτο το ότι ένα στρατηγικό προφίλ είναι ισορροπία Nash αν κανένας παίκτης δεν έχει πρόθεση να παρεκκλίνει από τη στρατηγική του και οι υπόλοιποι παίκτες δεν έχουν επίσης την ίδια πρόθεση.[4]

Σύμφωνα με τα παραπάνω θεωρούμε πως μια απεικόνισή όλων των στρατηγικών προφίλ ενός παίκτη X , όπου για κάθε προφίλ στρατηγικής x η στρατηγική συνιστώσα κάθε παίκτη είναι η καλύτερη απάντηση στο X . Μεγιστοποιείται, λοιπόν το πλήρωμα κάθε παίκτη θεωρώντας πως οι άλλοι παίκτες παίζουν σύμφωνα με τις υπόλοιπες συνιστώσες του X . Αν ένα στρατηγικό προφίλ εμπεριέχεται μέσα στο παραπάνω απεικονιζόμενο σύνολο, τότε έχουμε ένα σταθερό σημείο και ισορροπία. Επομένως στρατηγική ισορροπία έχουμε όταν ένα στρατηγικό προφίλ αποτελεί την καλύτερη απάντηση.

Το παιχνίδι των συναδέλφων

Έχουμε μια επιχείρηση η οποία απαρτίζεται από δύο συναδέλφους. Το κέρδος της επιχείρησης εξαρτάστε από την προσπάθεια που κάνει ο κάθε συνάδελφος δουλεύοντας και ορίζεται από την εξής συνάρτηση:

$$p = 4(x + y + cxy)$$

Όπου x είναι η προσπάθεια του πρώτου συνάδελφου και y του δεύτερου. Θεωρούμε πως $x, y \in [0, 4]$. Η τιμή $c \in [0, \frac{1}{4}]$ ανάλογα με την αξία της δουλειάς που έχει προσφέρει ο κάθε συνάδελφος. Το κόστος της προσπάθειας κάθε συνάδελφου είναι x^2 για τον πρώτο και y^2 για τον δεύτερο. Ο καθένας τους επιλέγει ο ίδιος την προσπάθεια που είναι διαθέσιμος να καταβάλει ξεχωριστά από τον άλλο, η απόφαση όμως θα πρέπει να παρθεί ταυτόχρονα. Ο στόχος και των δύο είναι να μεγιστοποιήσουν τα κέρδη της επιχείρησης τους. Έχουμε τις εξής συναρτήσεις πληρωμής:

- Για τον πρώτο συνεργάτη είναι $u_1(x, y) = \frac{p}{2} - x^2$
- Για τον δεύτερο είναι $u_2(x, y) = \frac{p}{2} - y^2$

Στην περίπτωση του παραπάνω παιχνιδιού δεν είναι δυνατό να ορίσουμε πίνακα πληρωμών καθώς ο στρατηγικός χώρος είναι συνεχής. Επομένως το παιχνίδι μπορεί να αναλυθεί με τις συναρτήσεις καλύτερης

απάντησης. Άρα στην προκειμένη περίπτωση μεγιστοποιούμε τη στρατηγική του πρώτου παίκτη. Θεωρούμε y' την πεπίθνη που έχει ο πρώτος παίκτης για τη στρατηγική του δεύτερου θεωρώντας πως η στρατηγική του δεύτερου παίκτη είναι σταθερή. Επομένως, η πληρωμή διαμορφώνεται ως εξής:

$$2(x + y' + cxy') - x^2$$

Για να μεγιστοποιήσουμε την παραπάνω συνάρτηση παίρνουμε την παράγωγο όπου η απόδοση της είναι:

$$2 + 2cy' - 2x$$

Θέτουμε το παραπάνω ίσο με 0 και λύνουμε ως προς x , το αποτέλεσμα της καλύτερης απάντησης για τον πρώτο συνεργάτη είναι:

$$BR_2(y') = 1 + cy'$$

Όμοια και για τον δεύτερο έχουμε

$$BR_2(x') = 1 + cx'$$

Τέλος αναζητούμε ένα στρατηγικό προφίλ (x^*, y^*) τέτοιο ώστε $x^* = BR_1(y^*)$ και $y^* = BR_1(x^*)$. Επειδή οι συναρτήσεις απάντησης παράγουν μια και μόνο μια απάντηση, είμαστε σε θέση να λύσουμε την παρακάτω ισότητα

$$x^* = 1 + cy^*$$

$$y^* = 1 + cx^*$$

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι $x^* = y^* = \frac{1}{(1-c)}$. Άρα υπάρχει μια μοναδική καθαρή ισορροπία Nash όπου κάθε συνεργάτης καταβάλει $\frac{1}{1-c}$ προσπάθεια.[4]

4. Απόλυτη ισορροπία Nash

ορισμός[4]

Ένα στρατηγικό προφίλ (s_i^*, s_{-i}^*) αποτελεί απόλυτη ισορροπία Nash για κάθε παίκτη i αν,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

για κάθε στρατηγική $s_i \neq s_i^*$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε πως μια ισορροπία

Nash είναι απόλυτη αν και μόνο αν κάθε παίκτης έχει μια και μοναδική καλύτερη απάντηση έναντι των στρατηγικών των υπολοίπων παικτών.

5. Μικτή ισορροπία Nash

Για να βρούμε την ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές Θα πρέπει να διευρύνουμε αρχικά την έννοια των καλύτερων απαντήσεων. Μέχρι τώρα έχουμε δει την παραπάνω έννοια στην καθαρή ισορροπία Nash.

ορισμός 1[4]

Ένα προφίλ μικτής στρατηγικής σ^* είναι μικτή στρατηγική ισορροπία Nash αν και μόνο αν, $\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_i^*)$.

Για το στρατηγικό προφίλ ισχύουν ακριβώς τα ίδια που ισχύουν και στην καθαρή ισορροπία. Δηλαδή ένα στρατηγικό προφίλ αποτελεί ισορροπία Nash όταν όλες οι στρατηγικές των παικτών είναι οι καλύτερες απαντήσεις. Επίσης μια μικτή ισορροπία Nash δεν χρησιμοποιεί ποτέ απόλυτα κυρίαρχες στρατηγικές.

ορισμός 2[4]

Ένα μικτό στρατηγικό προφίλ σ^* αποτελεί μικτή ισορροπία Nash αν για όλους τους παίκτες i ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$$

για κάθε $s_i \in s_i^*$.

Κορώνα - Γράμματα[4]

Θεωρούμε ως $\sigma_1 = (p, 1-p)$ τη μικτή στρατηγική του πρώτου παίκτη ο οποίος παίζει Κορώνα H με πιθανότητα p και γράμματα T με πιθανότητα $1-p$. Όμοια θεωρούμε για τον δεύτερο παίκτη $\sigma_2 = (q, 1-q)$, ο οποίος παίζει Κορώνα H με πιθανότητα q και γράμματα T με πιθανότητα $1-q$. Στη συνέχεια βρίσκουμε την αντιστοιχία της καλύτερης απάντησης του πρώτου παίκτη εν συναρτήσει με τη μικτή στρατηγική του δεύτερου παίκτη. Η αναμενόμενη πληρωμή του πρώτου παίκτη από τον συνδιασμό των καθαρών στρατηγικών με δεδομένη τη μικτή στρατηγική του δεύτερου παίκτη είναι οι εξής:

$$u_1(H, \sigma_2) = (1)q + (-1)(1-q) = 2q - 1$$

$$u_1(T, \sigma_2) = (-1)q + (1)(1-q) = 1 - 2q.$$

Η κορώνα αποτελεί την καλύτερη απάντηση αν και μόνο αν:

$$u_1(H, \sigma_2) \geq u_1(T, \sigma_2)$$

$$2q - 1 \geq 1 - 2q$$

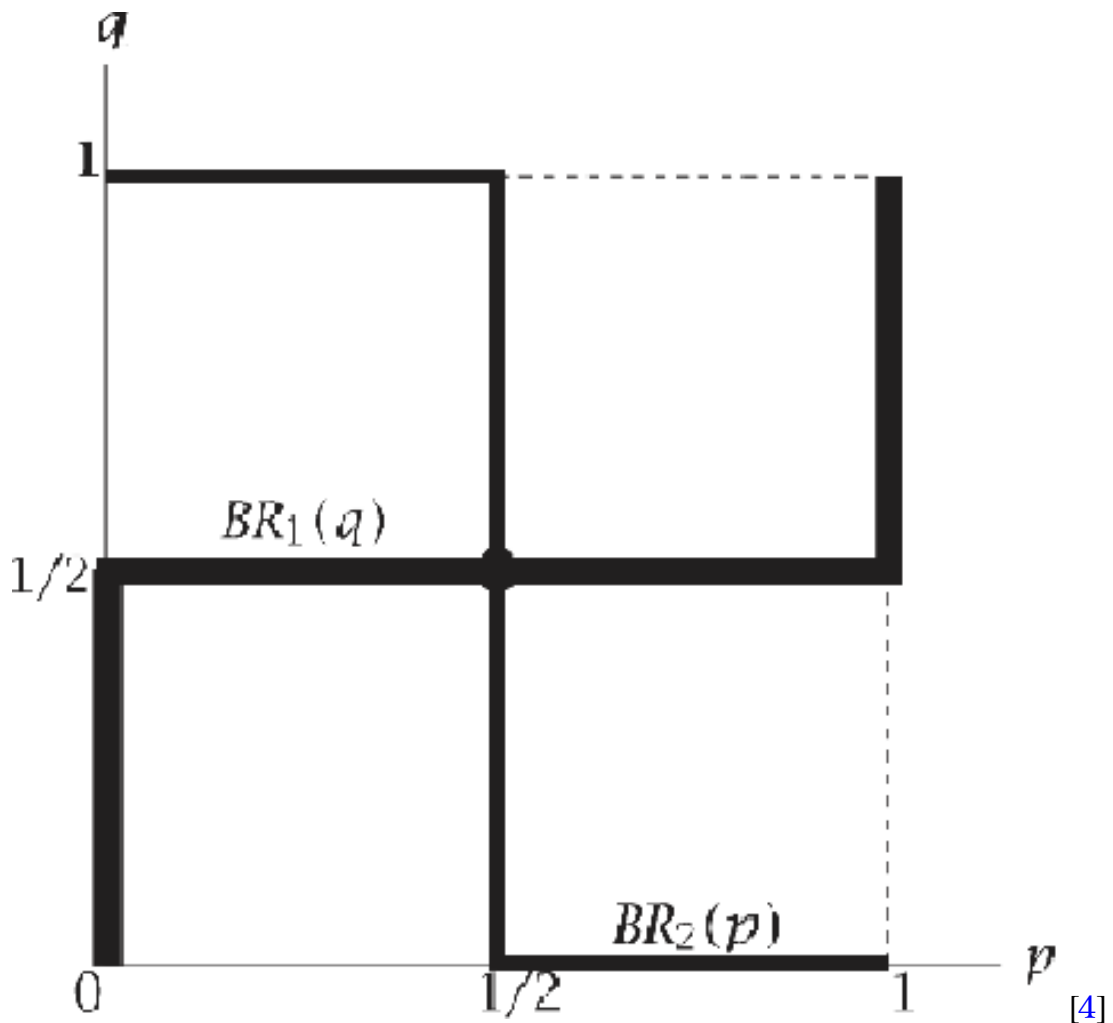
$q \geq \frac{1}{2}$ Όμοια τα γράμματα αποτελούν την καλύτερη απάντηση αν και μόνο αν $\frac{1}{2} \geq q$. Επομένως, ο πρώτος παίκτης θα πρέπει να διαλέξει $p = 1$ αν $q \leq \frac{1}{2}$ και $p = 0$ αν $q \geq \frac{1}{2}$. Αν το $q = \frac{1}{2}$ τότε η πληρωμή για τον παίκτη ένα είναι πάντα 0. Ως αποτέλεσμα και οι δύο στρατηγικές να θεωρούνται ως καλύτερες απαντήσεις, που σημαίνει πως αν μια μικτή στρατηγική τις περιλαμβάνει είναι και αυτή καλύτερη απάντηση. Πιο συγκεκριμένα αν ο παίκτης μέσω μιας καθαρής στρατηγικής έχει επιτύχει μέγιστη πληρωμή τότε και η μικτή στρατηγική που εμπεριέχει την παραπάνω καθαρή στρατηγική επιτυγχάνει και εκείνη μέγιστη πληρωμή άρα είναι καλύτερη απάντηση.

Ας δούμε τις παρακάτω τις αντιστοιχίες πιθανότητας με την καλύτερη απάντηση για τον κάθε παίκτη:

$BR_1(q)$	Πιθανότητα
0	$q < \frac{1}{2}$
[0,1]	$q = \frac{1}{2}$
1	$q > \frac{1}{2}$

$BR_2(p)$	Πιθανότητα
0	$p < \frac{1}{2}$
[0,1]	$p = \frac{1}{2}$
1	$p > \frac{1}{2}$

Στο παρακάτω γράφημα παρατηρούμε πως μόνο τα σημεία τομής είναι οι καλύτερες απαντήσεις. Επομένως το παιχνίδι έχει μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπία Nash $\langle \sigma_1^*, \sigma_2^* \rangle$ όπου $\sigma_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\sigma_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και $p = q = \frac{1}{2}$.



Συμμετρική ισορροπία Nash

ορισμός[4]

Ένα στρατηγικό προφίλ (s_1^*, s_2^*) είναι συμμετρική ισορροπία Nash αν είναι ισορροπία Nash και $s_1^* = s_2^*$.

Αναλυτικότερα έστω ότι έχουμε τον παρακάτω πίνακα ο οποίος έχει τρεις καθαρές ισορροπίες Nash $(A, A), (C, A), (A, C)$, μόνο μια όμως είναι συμμετρική η (A, A)

	A	B	C
A	1,1	2,1	4,1
B	1,2	5,5	3,6
C	1,4	6,3	0,0

6. Η μάχη των φύλων και μονά ζυγά

Ένα από τα γνωστά παιχνίδια όπου συναντάμε ισορροπίες Nash είναι το παιχνίδι της μάχης των φύλλων γνωστό ως *battle of sexes game*.

Στο παρακάτω παιχνίδι έχουμε δύο στρατηγικές για κάθε παίκτη. Ας πούμε Γήπεδο, Όπερα. Έτσι έχουμε τους εξής συνδυασμούς 1[Γήπεδο, Όπερα] 2[Όπερα, Γήπεδο] όπου και τα δύο αποτελούν ισορροπία Nash. Από τις δύο παραπάνω ισορροπίες έχουμε και την περίπτωση ο κάθε παίκτης να προτιμά μια από τις δύο και εν αντίθεσή μεταξύ τους. Επιπρόσθετα, έχουμε και την Τρίτη περίπτωση όπου έχουμε 3 [Όπερα, Όπερα] 4[Γήπεδο, Γήπεδο]. Οι παίκτες σε αυτή την περίπτωση προτιμούν και οι δύο μία εκ των δύο παραπάνω ισορροπιών Nash 3,4. Παρακάτω παρατίθεται ένας πίνακας με τις παραπάνω εκδοχές του παιχνιδιού.[8]

Άντρας Γυναίκα	Γήπεδο	Όπερα
Γήπεδο	2,1	0,0
Όπερα	0,0	1,2

Ας δούμε αναλυτικότερα το παραπάνω παιχνίδι. Ως p ορίζουμε την πιθανότητα που ο πρώτος παίκτης διαλέγει το Γήπεδο και q είναι αντίστοιχα η πιθανότητα που ο επόμενος παίκτης διαλέγει το Γήπεδο. Η πληρωμή του πρώτου παίκτη είναι η εξής αν διαλέξει Γήπεδο:

$$2q + 0(1 - q) = 2q$$

και η πληρωμή αν διαλέξει Όπερα είναι:

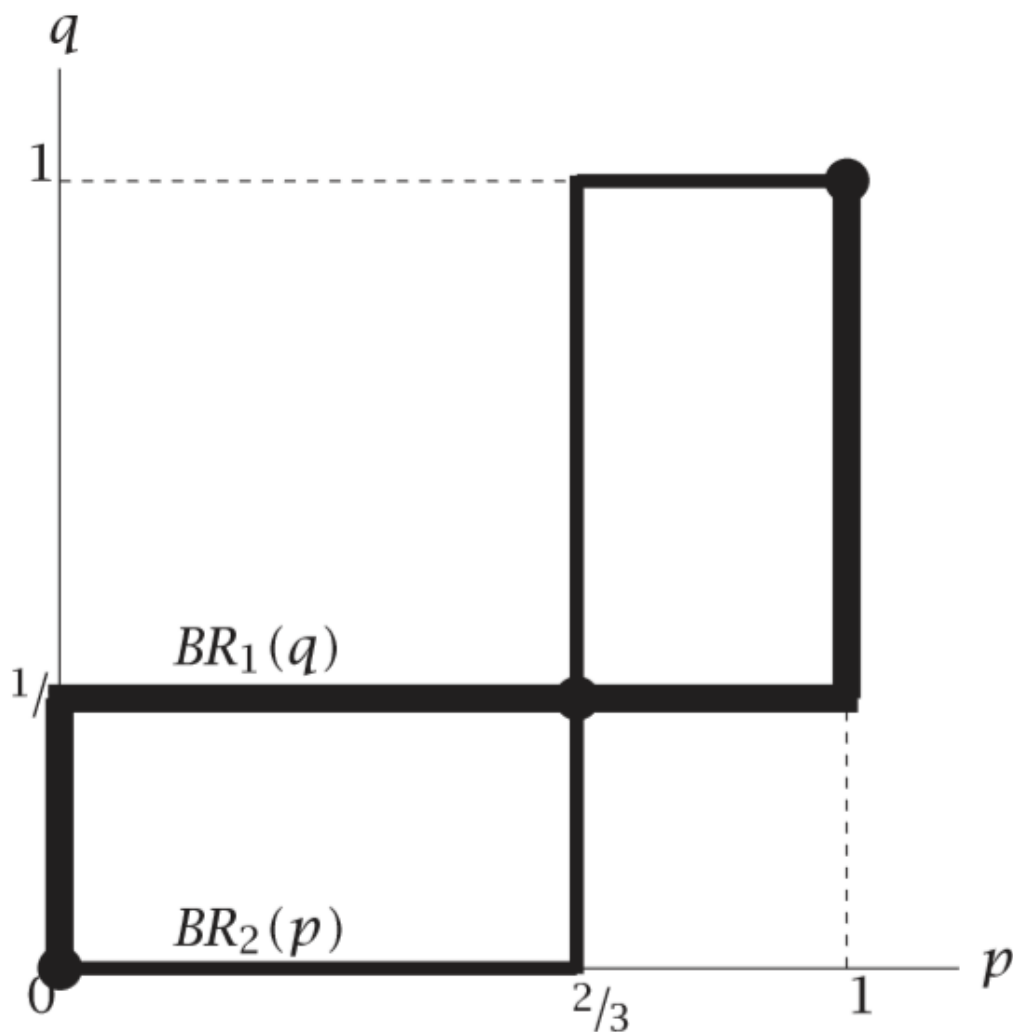
$$0q + 1(1 - q) = 1 - q$$

εφόσον $2q = 1 - q$ το $q = \frac{1}{3}$. Για κάθε $q < \frac{1}{3}$ ο παίκτης 1 έχει μια μοναδική καλύτερη απάντηση για τη καθαρή στρατηγική Όπερα. Για $q > \frac{1}{3}$ η απάντηση είναι και πάλι μοναδική και είναι η καθαρή στρατηγική Γήπεδο. Όσο για το $Q = \frac{1}{3}$ είναι ανάμεσα στις δύο καθαρές στρατηγικές οπότε θα επιλέξει ανάμεσα σε κάποια τυχαία μίξη αυτών. Άρα έχουμε τον εξής πίνακα στρατηγικών για τον πρώτο παίκτη:

$BR_1(q)$	Πιθανότητα
0	$q < \frac{1}{3}$
[0,1]	$q = \frac{1}{3}$
1	$q > \frac{1}{3}$

Την ίδια ακριβώς τακτική θα ακολουθήσουμε τώρα για τον δεύτερο παίκτη. Η αναμενόμενη λοιπόν, πληρωμή είναι $1p + 0(1 - p) = p$ για την επιλογή Γήπεδο. Για την επιλογή Όπερα έχουμε, $0p + 2(1 - p) = 2(1 - p)$. Επομένως έχουμε $p = 2(1 - p)$ όταν $p = \frac{2}{3}$.

$BR_1(p)$	Πιθανότητα
0	$p < \frac{1}{3}$
[0,1]	$p = \frac{1}{3}$
1	$p > \frac{1}{3}$



[4]

Υπάρχουν τρεις ισορροπίες Nash στις οποίες οι δύο καθαρές στρατηγικές είναι οι καλύτερες απαντήσεις έναντι των άλλων στρατηγικών η $\langle 0,0 \rangle$ και η $\langle 1,1 \rangle$. Επιπρόσθετα υπάρχει και μια τρίτη στρατηγική η οποία είναι μικτή ισορροπία Nash:(ορίζουμε το Γήπεδο ως Γ και την όπερα ως O)

$$\langle (\frac{2}{3}\Gamma, \frac{1}{3}O), (\frac{1}{3}\Gamma, \frac{2}{3}O) \rangle$$

Κάθε αποτέλεσμα έχει θετική πιθανότητα. Για να βρούμε την κάθε πιθανότητα πολλαπλασιάζουμε τις πιθανότητες ισορροπίας με την εκάστοτε κίνηση. Επομένως έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$(\Gamma, \Gamma) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad (O, O) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$(\Gamma, O) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad (O, \Gamma) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Επομένως ο πρώτος και ο δεύτερος παίκτης θα συναντηθούν με πιθανότητα $\frac{4}{9}$ και θα αποτύχουν να συναντηθούν με πιθανότητα $\frac{5}{9}$. Όλες οι παραπάνω πιθανότητες είναι απαραίτητο το άθροισμα τους να ισούται με τη μονάδα. Η πληρωμή η οποία θα προκύψει ανάμεσα

στους δύο παίκτες θα είναι :

$$2 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}. [4]$$

Πάραυτα όμως όπως προαναφέρθηκε υπάρχουν παιχνίδια που δεν έχουν καμία ισορροπία Nash. Ένα τέτοιο παιχνίδι είναι τα μονά ζυγά. [25]

παίκτης1 παίκτης2	0	1
0	1,0	0,1
1	0,1	1,0

7. Πέτρα, Ψαλίδι, χαρτί

Το παιχνίδι πέτρα ψαλίδι χαρτί είναι το γνωστό κλασσικό παιχνίδι όπου δύο παίκτες προσομοιώνουν με τα χέρια τους τρία αντικείμενα. Την πέτρα, το ψαλίδι και το χαρτί. Το παιχνίδι τελειώνει κάθε φορά που οι παίκτες βρίσκονται ισόπαλοι. Διαφορετικά ισχύουν οι εξής κανόνες:

- Η πέτρα νικά το ψαλίδι.
- Το ψαλίδι νικά το χαρτί.
- Το χαρτί νικά την πέτρα.

Κάθε φορά που κάποιος παίκτης κερδίζει έχει πλήρωμα 1, αν χάσει -1 και αν βρεθούν ισόπαλοι είναι 0. Ο παρακάτω πίνακας απεικονίζει όλες τις καταστάσεις πληρωμών. Θέτουμε ως R (πέτρα - Rock), P (Χαρτί - Paper), S (ψαλίδι - scissors)

	R	P	S
R	0,0	-1,1	1,-1
P	1,-1	0,0	-1,1
S	-1,1	1,-1	0,0

Στο παραπάνω παιχνίδι δεν είναι εύκολο να διακρίνουμε μια καθαρή στρατηγική η οποία να οδηγεί κατευθείαν στη νίκη. Επίσης είναι προφανές πως υπάρχει συμμετρική ισορροπία . Ψάχνουμε λοιπόν την συμμετρική ισορροπία. Αν ο παίκτης επιλέξει πέτρα έχει πιθανότητα p , αν επιλέξει χαρτί έχει πιθανότητα q ,τέλος, αν επιλέξει ψαλίδι έχει πιθανότητα $1 - p - q$. Επομένως η πληρωμή του παίκτη διαμορφώνεται ως εξής:

- Αν επιλέξει πέτρα:

$$p(0) + q(-1) + (1 - p - q) = 1 - p - 2q$$

- Το ψαλίδι νικά το χαρτί.

$$2p + q - 1$$

- Το χαρτί νικά την πέτρα.

$$q - p$$

Οι πληρωμές ανάμεσα στις στρατηγικές θα πρέπει να είναι ίδιες έχουμε επομένως ,

$$1 - p - 2q = 2p + q - 1 = p - q$$

το αποτέλεσμα των παραπάνω είναι $p = q = \frac{1}{3}$.

Συνάγεται λοιπόν το συμπέρασμα πως όταν ένας παίκτης παίζει 3 καθαρές στρατηγικές με την ίδια πιθανότητα ο αντίπαλος έχει τη δυνατότητα να παίξει μια μικτή στρατηγική. Οι παραπάνω όμως στρατηγικές είναι ολοκληρωτικά μικτές και συμμετρικές ως αποτέλεσμα η στρατηγική ισορροπία να ισούτε με $\frac{1}{3}$. [4]

8. Συμπεράσματα

- Η στρατηγική επιλογή του παίκτη i είναι η καλύτερη απάντηση στην επιλογή της στρατηγικής των αντιπάλων του, αν του αποφέρει τον υψηλότερο πλήρωμα (payoff) έναντι των επιλογών των υπολοίπων παικτών.
- Ένας συνδυασμός στρατηγικής είναι μια ισορροπία Nash αν η επιλογή της στρατηγικής κάθε παίκτη είναι η καλύτερη απάντηση εναντίον των επιλογών των αντιπάλων τους πάνω σε αυτόν τον συνδυασμό.
- Η ισορροπία Nash είναι η πιο δημοφιλής ιδέα λύσης σε όλη τη θεωρία των παιγνίων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μια ποικιλία τρόπων.
- Η ισορροπία Nash έχει χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει τα παρατηρούμενα πρότυπα συμπεριφοράς στα ζώα που ζουν στο φυσικό περιβάλλον.
- Κάθε λύση IEDS πρέπει να είναι ισορροπία Nash. Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν ισορροπίες Nash που δεν είναι Λύσεις IEDS. Το ίδιο ισχύει και για μια κυρίαρχη στρατηγική λύση. Πρέπει να είναι μια ισορροπία Nash, αλλά το αντίστροφο δεν είναι υποχρεωτικό πως θα ισχύει.[8]

Κεφάλαιο 9

Κβαντική Ισορροπία Nash

1. Κβαντική ισορροπία Nash στο χώρο $SU(2)$

Σύμφωνα με το άρθρο των Adrian P. Flitney και λοιπων [26], υπάρχουν τρεις περιοχές στο χώρο των κβαντικά εμπλεκόμενων καταστάσεων όπου προκύπτει η ισορροπία Nash.

- ▶ Όταν η κβαντική εμπλοκή είναι μέγιστη, τότε υπάρχει νέα ισορροπία Nash.
- ▶ Όταν η κβαντική εμπλοκή είναι ελάχιστη τότε συναντάτε η ίδια συμπεριφορά που υπάρχει σε ένα κλασσικό παιχνίδι.
- ▶ Στις ενδιάμεσες καταστάσεις υπάρχει μια κλασσική-κβαντική ενδιάμεση συμπεριφορά.

Οι μη γενικές στρατηγικές με δύο παραμέτρους είναι ατελής κατά τη σύνθεση. Επομένως τουλάχιστον τρεις παράμετροι είναι απαραίτητοι προκειμένου να περιγράφουν ένα γενικό σύνολο τελεστών $SU(2)$.

Πάραυτα σε μια πλήρη στρατηγική τριών παραμέτρων δεν υπάρχει ισορροπία Nash όταν η στρατηγική που έχει υιοθετηθεί είναι κβαντική και ντετερμινιστική. Όμως, υφίσταται ισορροπία Nash σε στρατηγικές που είναι γραμμικοί συνδυασμοί μοναδιαίων πινάκων.

Συνάγεται, πως η ισορροπία Nash είναι δυνατόν να υπάρξει σε στρατηγικές δύο παραμέτρων αν περιοριστεί ο στρατηγικός $SU(2)$ που χρησιμοποιείτε από τους παίκτες σε ένα υποσύνολο του παραπάνω στρατηγικού χώρου. Ουσιαστικά οι επιλογές των παικτών περιορίζονται επομένως δεν χρησιμοποιούν ποια όλες τις κβαντικές στρατηγικές που είναι διαθέσιμες στο $SU(2)$ αλλά κάποιες απο αυτές.

2. Κβαντική ισορροπία Nash της μάχης των φύλων

Παρακάτω θα μελετήσουμε την κβαντική ισορροπία Nash του παιχνιδιού της μάχης των φύλων. Παραπάνω είδαμε την κλασσική εκδοχή του παιχνιδιού και την ανάλογη ισορροπία Nash. Οι Jiangfeng Du και λοιποί, παρουσιάζουν σε άρθρο που δημοσίευσαν το 2001 την κβαντική μορφή του παιχνιδιού χρησιμοποιώντας κβαντικές λογικές πύλες. [27]

Κάθε παίκτης έχει στην κατοχή του ένα κλασσικό σύστημα δύο καταστάσεων, αρχικά είναι και τα δύο στην κατάσταση μηδέν. Τα παραπάνω συστήματα ανήκουν στον στρατηγικό χώρο $SU(2)$ και ορίζονται ως U_A και U_B .

$$U = \begin{Bmatrix} e^{i\frac{\phi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} & ie^{i\frac{\phi+\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ ie^{-i\frac{\phi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\frac{\phi+\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{Bmatrix}, \phi, \psi, \theta \in (-\pi, \pi)$$

Αν $\phi = \psi$ τότε,

$$U = \begin{Bmatrix} e^{i\phi} \cos\frac{\theta}{2} & i \sin\frac{\theta}{2} \\ i \sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos\frac{\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

Έστω πως έχουμε τέσσερις καταστάσεις που αντιστοιχούν στον πίνακα payoff που είδαμε στην παραπάνω περιγραφή του παιχνιδιού. Στη συνέχεια θα κατονομάσουμε με T την επιλογή Γήπεδο και με O την επιλογή όπερα. Επίσης έχουμε $\alpha > \beta > \gamma$. Άρα ο πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:[27]

Άντρας Γυναίκα	O	T
O	α, β	γ, γ
T	γ, γ	β, α

Η αρχική κατάσταση του παιχνιδιού είναι η $|\psi_{in}\rangle = J|OO\rangle$, και το αποτέλεσμα την κατάστασης είναι $|\psi_{out}\rangle = j^+ U_A \otimes U_B J|OO\rangle$. Επομένως οι πληρωμές γίνονται ως εξής:[27]

$$\begin{aligned} S_A &= \alpha P_{OO} + \beta P_{TT} + \gamma(P_{OT} + P_{TO}) \\ S_B &= \alpha P_{TT} + \beta P_{OO} + \gamma(P_{OT} + P_{TO}) \end{aligned}$$

Θεωρούμε $P_{\sigma\tau}$ το αποτέλεσμα μετά τη μέτρηση και το περιγράφουμε σύμφωνα με το άρθρο ως εξής:

$$P_{\sigma\tau} = |\langle \sigma\tau | j^+ U_A \otimes U_B J | OO \rangle|^2$$

όπου $\sigma, \tau \in O, T$. [27]

Μέγιστη κβαντική εμπλοκή του παιχνιδιού

Αν $\delta = \frac{\pi}{2}$ τότε έχουμε κατάσταση μέγιστης κβαντικής εμπλοκής και $\phi \neq 0$. Η πιθανότητα $P_{\sigma\tau}$ διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} S_A &= (\alpha - \gamma)P_{OO} + (\beta - \gamma)P_{TT} + \gamma \\ S_B &= (\alpha - \gamma)P_{TT} + (\beta - \gamma)P_{OO} + \gamma \end{aligned}$$

Επομένως σύμφωνα με το άρθρο το στρατηγικό προφίλ που ακολουθούν οι παίκτες είναι το εξής $S_A = S_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε πως η παραπάνω στρατηγική είναι ισορροπία Nash για την κλασσική περίπτωση του παιχνιδιού την οποία ήδη μελετήσαμε αριθμητικά παραπάνω. Πάραυτα δεν είναι ισορροπία Nash στον κβαντικό χώρο. Αν ο άντρας μπορεί να αλλάξει τη στρατηγική του σε

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

καθώς θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να είναι σε θέση να ορίσει το αποτέλεσμα έτσι ώστε να νικά πάντα εκείνος. Δηλαδή από την αρχική κατάσταση $|OO\rangle$ θα πρέπει πάντα να καταλήγει στην κατάσταση $|TT\rangle$. Επομένως, είναι προφανές πως ο άντρας έχει τη δυνατότητα να αυξήσει την πληρωμή του από το β στο α αλλάζοντας την ίδια του τη στρατηγική. Σύμφωνα, λοιπόν, με το άρθρο έχουμε άπειρη ισορροπία Nash. Άρα ο πίνακας των πληρωμών έχει πλέον την εξής μορφή :

θ_A^*	θ_B^*	$\phi_A^* + \phi_B^*$	S_A	S_B
π	π	$\frac{\pi}{2}$	β	α
$-2\arcsin\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}$	$2\arcsin\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}$	$\frac{\pi}{2}$	β	α
$2\arcsin\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}$	$-2\arcsin\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}$	$\frac{\pi}{2}$	β	α

Όπως ξέρουμε ήδη από την κλασσική εκδοχή, η μάχη των φύλων είναι ένα ασύμμετρο παιχνίδι. Παρατηρείται λοιπόν πως και για τους δύο παίκτες η ισορροπία Nash όπως αναφέρεται μέσα στο άρθρο είναι ίδια καθώς οδηγεί σε ένα μη-συμμετρικό αποτέλεσμα. Όπως φαίνεται η γυναίκα μπορεί να επιτυγχάνει πάντα β και ο άντρας πάντα α . οι δύο στρατηγικές το πίνακα (από το τέλος) είναι ίδιες και δεν μπορούν να αναλυθούν ή να αντιστοιχίσουν στις κλασσικές στρατηγικές.

Περιορισμός χώρου

Στο προαναφερθείς άρθρο οι συγγραφείς αποδεικνύουν πως δε μπορεί να υπάρξει ισορροπία Nash για κάθε καθαρή στρατηγική στο

χώρο $SU(2)$. Συνεπώς, γενικότερα σε παιχνίδια μεταξύ δύο παικτών, αν οι παίκτες έχουν τη δυνατότητα να αλλάξουν στρατηγική σε ολόκληρο το χώρο $SU(2)$ τότε δεν υπάρχει εικονική ισορροπία Nash. Για τον παραπάνω λόγο είναι προτιμότερο να περιορίζεται ο στρατηγικός χώρος σε ένα υποσύνολο του $SU(2)$.

Συμπεράσματα

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα ευρήματα του άρθρου, υπάρχει άπειρη ισορροπία Nash στην κβαντική έκδοση του παιχνιδιού, χωρίς όμως να βελτιώνεται ο τρόπος παιχνιδιού ή η πληρωμή σε σχέση με την κλασσική εκδοχή.

Έπειτα τα παιχνίδια δύο ατόμων θα πρέπει να περιοριστούν σε ένα υποσύνολο του χώρου $SU(2)$ προκειμένου να βρεθεί εικόνα της ισορροπίας Nash. Πάραυτα παιχνίδια με παραπάνω από δύο παίκτες φαίνεται πως δεν παρουσιάζουν την παραπάνω ιδιομορφία καθώς φαίνεται να έχουν ισορροπία Nash σε όλο το στρατηγικό χώρο $SU(2)$.

Κεφάλαιο 10

Το δίλημμα των φυλακισμένων

Το δίλημμα των φυλακισμένων αρχικά σχηματίστηκε από τους Merrill Flood και Melvin Dresher το 1950. Ο Albert W. Tucker επισημοποίησε το παιχνίδι με τις ποινές φυλάκισης και το ονόμασε "δίλημμα του κρατουμένου" (Poundstone, 1992)[28], παρουσιάζοντάς το ως εξής:

Δύο μέλη μιας εγκληματικής συμμορίας συλλαμβάνονται και φυλακίζονται. Κάθε κρατούμενος βρίσκεται σε απομόνωση χωρίς κανενός είδους επικοινωνία με τον άλλο. Οι εισαγγελείς δεν διαθέτουν επαρκή αποδεικτικά στοιχεία για να καταδικάσουν το ζευγάρι στην κύρια κατηγορία. Ελπίζουν να καταδικαστούν και οι δύο με λιγότερα χρόνια φυλάκιση. Ταυτόχρονα, οι εισαγγελείς προσφέρουν σε κάθε φυλακισμένο μια συμφωνία. Κάθε φυλακισμένος έχει την ευκαιρία είτε: να προδώσει τον άλλο, δηλώνοντας ότι ο άλλος διαπράττει το έγκλημα, είτε να συνεργαστεί με τον άλλο παραμένοντας σιωπηλός. Η προσφορά είναι:

- ▶ Εάν οι A και B προσδώσουν ο καθένας τον άλλο, ο καθένας από αυτούς θα υπηρετήσει 10 χρόνια στη φυλακή.
- ▶ Αν ο A προδίδει το B αλλά ο B παραμένει σιωπηλός, το A θα τεθεί ελεύθερος και ο B θα υπηρετήσει 25 χρόνια στη φυλακή (και αντίστροφα)
- ▶ Εάν και οι δύο A και B παραμείνουν σιωπηλοί, και οι δύο θα υπηρετήσουν μόνο 1 χρόνο στη φυλακή (με τη μικρότερη χρέωση)

Γυναίκα Άνδρας	Ομολογεί	Δεν ομολογεί
Ομολογεί	10,10	1,25
Δεν ομολογεί	25,1	3,3

Ας δούμε αναλυτικά γιατί η καλύτερη λύση είναι να μην ομολογήσει κανείς. Όπως είναι ήδη προφανές από τον παραπάνω πίνακα η καλύτερη

λύση για τους παίκτες είναι κανένας εκ των δύο να ομολογήσει. Θέτω ως D (Deny) την περίπτωση όπου κάποιος δεν ομολογεί και ως C (Confess) όταν κάποιος παίκτης ομολογεί. Προφανώς ο συνδυασμός (D, D) αποτελεί τη μόνη ισορροπία Nash. Αυτό συμβαίνει διότι αν η Γυναίκα δεν ομολογήσει τότε ο άντρας δεν έχει άλλη καλύτερη απάντηση από το να μην ομολογήσει. Αντίστοιχα αν ο άντρας δεν ομολογήσει η γυναίκα δεν έχει καλύτερη απάντηση από το να μην ομολογήσει. Ας δούμε αναλυτικά όλες τις περιπτώσεις:

- ▶ (C, C) είναι προφανές πως δεν αποτελεί ισορροπία Nash. Αν η γυναίκα για παράδειγμα αποφασίσει να ομολογήσει τότε ο άντρας μπορεί να αποκλίνει σημαντικά επιλέγοντας μην ομολογήσει ($25 > 1$). Αντίστοιχα και το αντίστροφο αν η γυναίκα δεν ομολογήσει και ο άντρας ομολογήσει.
- ▶ (C, D) δεν αποτελεί ισορροπία Nash, διότι αν ένας εκ των δύο επιλέξει D τότε και ο άλλος έχει μέγιστη πληρωμή μόνο αν επιλέξει D και σε καμία άλλη περίπτωση.
- ▶ (D, C) Αυτή η περίπτωση συνάβει με την παραπάνω διότι έχουν ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα.

Επομένως είναι προφανές πως η μόνη καλύτερη απάντηση είναι η (D, D) .

Πρόσφατα αυτό το παιχνίδι πήρε μια κβαντική έκδοση, επιτρέποντας στους παίκτες να υιοθετήσουν κβαντικές στρατηγικές. Στην κβαντική έκδοση κάθε παίκτης έχει ένα qubit και μπορεί να το χειριστεί ανεξάρτητα. Σε μια περιορισμένη στρατηγική διαστημική κατάσταση, δηλαδή ένα σύνολο στρατηγικών δύο παραμέτρων που είναι ένα υποσύνολο ολόκληρου του ενιαίου χώρου. Μπορούμε να δούμε ότι ο παίκτης ταυτότητας είναι κατά κάποιον τρόπο ισοδύναμος με έναν παίκτη αναστροφής του νομίσματος. Ο πρώτος αντιστοιχεί στην κλασική στρατηγική "συνεργασίας". Στο κβαντικό παιχνίδι μπορούμε να δούμε ότι στο βήμα λήψης αποφάσεων ο παίκτης έχει μέσα επικοινωνίας μεταξύ τους, δηλαδή κανείς δεν έχει καμία πληροφορία σχετικά με τη στρατηγική που ο άλλος παίκτης θα υιοθετήσει. Αυτό είναι το ίδιο όπως και στο κλασικό παιχνίδι.

Ως εκ τούτου, είναι φυσικό να ρωτάμε γιατί το παιχνίδι δείχνει μια τέτοια συναρπαστική ιδιότητά στο κβαντικό παιχνίδι. Η απάντηση είναι η εμπλοκή, το κλειδί στις κβαντικές πληροφορίες και ο κβαντικός υπολογισμός. Παρόλο που δεν υπάρχει επικοινωνία μεταξύ στους δύο παίκτες, τα δύο qubit είναι μπλεγμένα και ως εκ τούτου η τοπική δράση ενός παίκτη στο qubit του θα επηρεάσει την κατάσταση του άλλου. Η εμπλοκή αποτελεί σύμβαση του παιχνιδιού.[29]

Σύμφωνα με τους Jens Eisert και λοιποί, η κβαντική εκδοχή του διλήμματος των φυλακισμένων βασίζεται στα εξής:[9]

- Οι παίκτες έχουν ως κύριο μέλημα να αποδράσουν από τη φυλακή, το οποίο μπορούν να επιτύχουν χρησιμοποιώντας κβαντικές στρατηγικές.
- Υπάρχει ένα συγκεκριμένο κβαντικό ζευγάρι στρατηγικής το οποίο οδηγεί πάντοτε σε ανταμοιβή και είναι ισορροπία Nash.
- Υπάρχει κβαντική στρατηγική η οποία δίνει πάντα τουλάχιστον προβάδισμα αν χρησιμοποιηθεί ενάντια μιας κλασσικής στρατηγικής.

Το φυσικό μοντέλο το οποίο αναπαριστά το παιχνίδι αποτελείται από:[9]

- Μια πηγή με δύο bits, ένα για κάθε παίκτη.
- Ένα σύνολο από φυσικά όργανα τα οποία δίνουν τη δυνατότητα στον εκάστοτε παίκτη να να διαχειριστεί το bit που κατέχει με ένα στρατηγικό τρόπο.
- Μια συσκευή μέτρησης η οποία καθορίζει την πληρωμή κάθε παίκτη ανάλογα με την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το κάθε bit.

Όλα τα παραπάνω θεωρούνται γνωστά σε όλους τους παίκτες. Συνεπώς έχουμε δύο πιθανά αποτελέσματα τα οποία εκφράζονται σε χώρο Hilbert και είναι τα D (Deny) και C (Confess). Έχουμε λοιπόν τα εξής δύο κετ, $|D\rangle$ και $|C\rangle$. Σε κάθε στιγμιότυπο, η κατάσταση του παιχνιδιού περιγράφεται από ένα χώρο τανυστικού γινομένου το οποίο εκτείνεται σύμφωνα με το κλασσικό παιχνίδι. Επομένως έχουμε τις εξής καταστάσεις:

$$|CC\rangle, |CD\rangle, |DC\rangle, |DD\rangle$$

Παρακάτω θα δούμε πως απεικονίζεται σύμφωνα με τους Jens Eisert και λοιποί, το παραπάνω παιχνίδι σε κβαντική μορφή με δύο παίκτες.

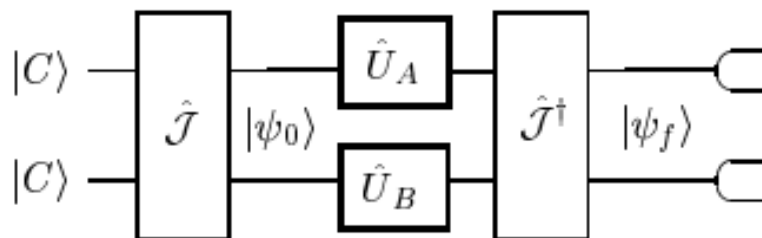


FIG. 1. The setup of a two player quantum game.

[9]

Όπου J είναι η αρχική κατάσταση $|\psi_0\rangle = J|CC\rangle$ όπου J είναι ένας μοναδιαίος τελεστής γνωστός και στους δύο παίκτες. Για να είναι το παιχνίδι δίκαιο θα πρέπει το J να είναι συμμετρικό σύμφωνα με τις αλλαγές που κάνουν οι παίκτες. $\hat{U}_a$ και $\hat{U}_b$ είναι μοναδιαίοι τελεστές για

κάθε παίκτη αντίστοιχα οι οποίοι αντιστοιχούν μέσα σε ένα στρατηγικό χώρο S .

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την κβαντική εκδοχή του παραπάνω παιχνιδιού καθώς θα εκφράσουμε την ισορροπία Nash του παιχνιδιού σε χώρους Banach. Θα ήταν όμως, αξιοσημείωτο σε αυτό το σημείο να τονίσουμε την διαφορά μιας κλασσικής στρατηγικής σε αντιστοιχία με μια κβαντική. Παρατίθεται, λοιπόν η παρακάτω εικόνα η οποία αναπαριστά τις πληρωμές του παιχνιδιού όταν οι παίκτες είναι κλασσικοί και δρουν με κλασσικές στρατηγικές (αριστερά), και όταν οι παίκτες παίζουν κβαντικά άρα υιοθετούν κβαντικές στρατηγικές (δεξιά).

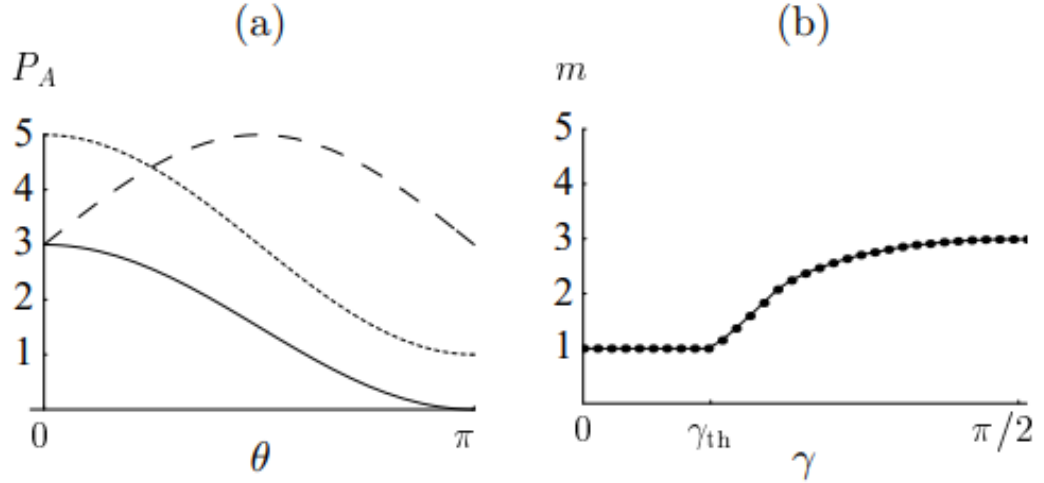


FIG. 4. Quantum versus classical strategies: (a) Alice's pay-off as a function of θ when Bob plays $\hat{U}(\theta, 0)$ ($\hat{U}(0, 0) = \hat{C}$ and $\hat{U}(\pi, 0) = \hat{D}$) and Alice chooses $\hat{C}$ (solid line), $\hat{D}$ (dots) or $\hat{M}$ (dashes). (b) The expected pay-off Alice can always attain in an unfair game as a function of the entanglement parameter γ .

[9]

Κεφάλαιο 11

Το δίλημμα των φυλακισμένων για πολλούς παίκτες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την κλασσική εκδοχή του διλήμματος των φυλακισμένων. Παρακάτω θα μελετήσουμε την κβαντική εκδοχή του παραπάνω παιχνιδιού για πολλούς παίκτες $N > 3$.

Αρχικά θα παραθέσουμε ένα σχήμα όπου φαίνεται η ισορροπία Nash του παιχνιδιού για δύο παραμέτρους με κβαντική στρατηγική.

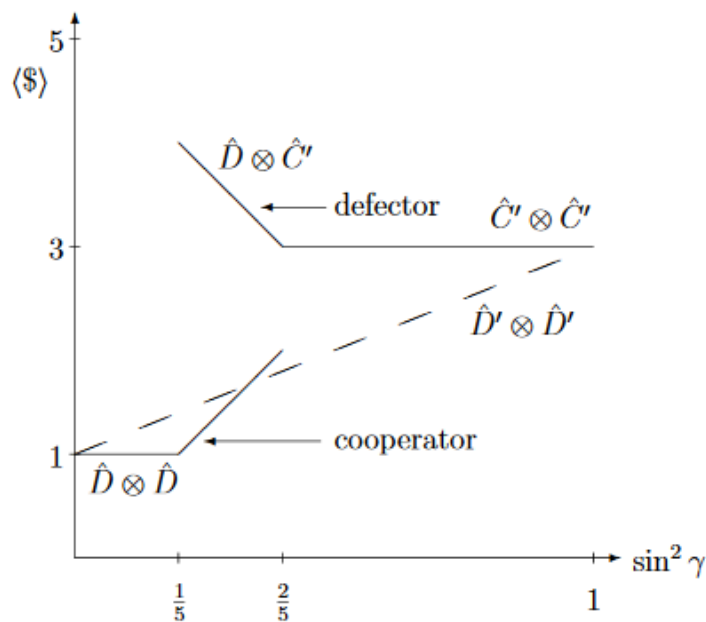


Fig. 1. The Nash equilibrium payoffs in a quantum version of Prisoners' Dilemma as a function of the degree of entanglement, as measured by $\sin^2 \gamma$, for the strategy space $S^{(1)}$ (solid lines), and for $S^{(2)}$ (dashed line). For $S^{(1)}$ there are three regions with different the Nash equilibria: $\hat{D} \otimes \hat{D}$, $\hat{C}' \otimes \hat{D}$ and $\hat{D} \otimes \hat{C}'$, and $\hat{C}' \otimes \hat{C}'$. The strategy $\hat{C}'$ is a cooperative strategy, becoming equivalent to $\hat{C}$ as $\gamma \rightarrow 0$.

[26]

Σύμφωνα με το άρθρο των Adrian P. Flitney και λοιπον [26], στο παιχνίδι περισσότερων παικτών υπάρχουν τρεις βασικές αρχές:

- Η αποχή είναι η κυρίαρχη στρατηγική, οι παίκτες λαμβάνουν καλύτερη πληρωμή κατά την "σιωπή" παρά από τη συνεργασία.
- Ένας παίκτης επωφελείται εάν όλοι οι υπόλοιποι παίκτες συνεργάζονται.
- Όταν οι κινήσεις των $N - 2$ παικτών είναι συγκεκριμένες τότε το παιχνίδι υπάγεται σε παιχνίδι 2×2 .

Αν οι πληρωμές των στρατηγικών συνεργασίας και αποχής αντίστοιχα όπου m είναι ο αριθμός των παικτών που συνεργάζεται,

$$S_c = \begin{cases} 0 & m > 1 \\ 3 + 4(m - 2) & m > 1 \end{cases}$$

$$S_D = 5 + 4(m - 1)$$

Σε στρατηγικό χώρο $S^{(1)}$ τότε υπάρχει γενική ισορροπία $\hat{C}' \otimes \hat{C}'$ σε μέγιστα κβαντικά εμπλεκόμενο παιχνίδι $\hat{C}_N^{\otimes N}$ όπου,

$$\hat{C}_n = M^{(1)}(0, \frac{\pi}{n}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{n}} \end{pmatrix}$$

Η στρατηγική $\hat{C}_n$ απεικονίζει στρατηγική συνεργασίας, $\theta = 0$, με παράγοντα φάσης $\frac{\pi}{N}$.

Στο στρατηγικό σύνολο $S^{(1)}$ κάθε, $\hat{C}_n = M^{(1)}(\pi, \frac{\pi}{n})$ είναι ίσο με D . Στο άρθρο αποδεικνύεται πως η $\hat{C}$ είναι συμμετρική ισορροπία Nash, για μέγιστη κβαντική εμπλοκή με καλύτερη στρατηγική $M^{(1)}(0, \frac{\pi}{N}) = \hat{C}$ όταν οι στρατηγικές των υπολοίπων παικτών είναι σταθερές. Λόγο συμμετρίας παρατηρείται πως $\hat{C}_N^{\otimes N}$ είναι ισορροπία Nash.

Πάραυτα υπάρχει παράμετρος γ όπου αν η εμπλοκή είναι μικρότερη από αυτή την τιμή δεν είναι πια ισορροπία Nash. Υπάρχει νέα ισορροπία Nash επίσης, αν ένας από τους δύο παίκτες επιλέξει στρατηγική $\hat{C}_2$, ενώ παράλληλα όλοι οι υπόλοιποι παίκτες σιωπούν.

Σύμφωνα με το άρθρο αποδεικνύεται πως,

$$\frac{1}{(4N-3)} \leq \sin^2 \gamma \leq \frac{1}{2}$$

για το στρατηγικό προφίλ, $\hat{C}_2 \otimes D^{\otimes N-1}$ είναι ισορροπία Nash.

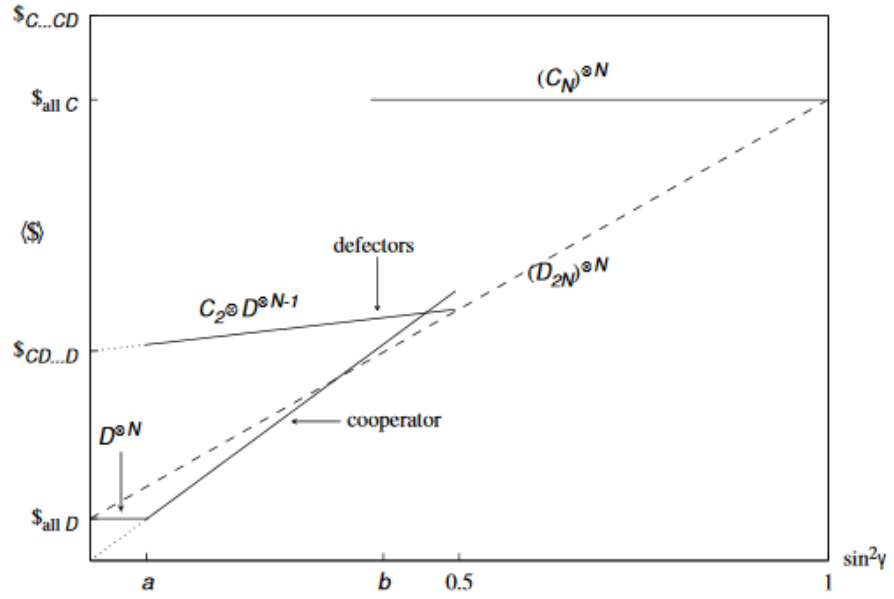


Fig. 3. The Nash equilibrium payoffs in a quantum version of a four-player Prisoners' Dilemma as a function of the degree of entanglement, as measured by $\sin^2 \gamma$, for the strategic space $S^{(1)}$ (solid lines), and $S^{(2)}$ (dashed line). In the case of $S^{(1)}$ there are three regions with different Nash equilibria. The same structure holds for arbitrary N , the main difference being that the gradient of the line for the cooperator's payoff in the intermediate region increases with N . The thresholds are, in general, $a = 1/(4N - 3)$ and $b = 4/((4N - 3)(1 - \cos \frac{2\pi}{N}))$.

[26]

Είναι σημαντικό στην παραπάνω στρατηγική ισορροπία Nash να ληφθεί υπόψη ποίος είναι ο παίκτης που έχει υιοθετήσει την στρατηγική $\hat{C}_2$. Η ασύμμετρη στρατηγική της παραπάνω ισορροπίας, όμως δεν αποτελεί πρακτική λύση.

Όταν ο στρατηγικός χώρος είναι ο $S^{(2)}$ υπάρχει συμμετρική ισορροπία ανάλογη με εκείνη του κλασσικού παιχνιδιού των δύο παικτών, $\hat{C}_{2N}^{\otimes N}$ όπου,

$$D_{\vec{n}} = M\vec{\Pi}^{(2)}(\pi, \frac{\pi}{n}) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{\frac{i\pi}{n}} \\ ie^{-\frac{i\pi}{n}} & 0 \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω στρατηγική φαίνεται να ικανοποιεί κάθε μονομερή εκδοχή στρατηγικής ως εσωτερικό αποτέλεσμα για κάθε παίκτη.

Οι χώροι $S^{(1)}$ και $S^{(2)}$ μπορούν να πάρουν την εξής μορφή :

$$S_k^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & ie^{ik\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ ie^{-ik\phi} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$S_k^{(2)} = \begin{pmatrix} ie^{ik\phi} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & ie^{-ik\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

όπου $k \in [0, 1]$. Αν θέσουμε $k = 0$ τότε μειώνεται $S_k^{(j)} \rightarrow S^{(j)}$ για $j = 1, 2$.

Στην εικόνα παρουσιάζεται η εκδοχή του παιχνιδιού για δύο παίκτες αλλά με στρατηγική δύο παραμέτρων:

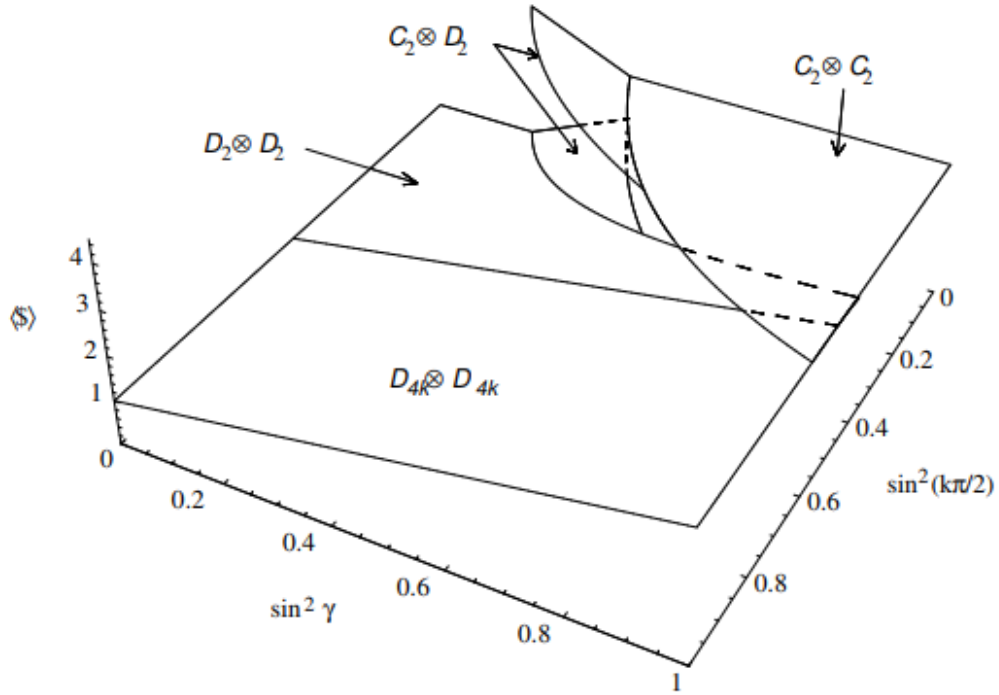


Fig. 4. The surfaces show the payoff to both players at the Nash equilibria for a two-player quantum Prisoners' Dilemma using the strategy space $S_k^{(1)}$, as a function of the entanglement and the strategy space parameter k . The strategy profile $\hat{D}_{4k} \otimes \hat{D}_{4k}$ is a Nash equilibrium for $k \geq \frac{1}{2}$, with the surface folding at $k = \frac{1}{2}$, below which the equilibrium is $\hat{D}_2 \otimes \hat{D}_2$. The strategy profile $\hat{C}_2 \otimes \hat{C}_2$ has a payoff of three but is only a Nash equilibrium for $\sin^2 \gamma \cos^2 \frac{k\pi}{2} \geq \frac{2}{5}$. There is a small region where there is an asymmetric Nash equilibrium of $\hat{C}_2 \otimes \hat{D}_2$ or $\hat{D}_2 \otimes \hat{C}_2$. Here the defector gets a payoff of between 3 and 4, while the cooperator must be satisfied with between 1 and 2.

[26]

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε το παιχνίδι των φυλακισμένων κάνοντας χρήση τους παραπάνω γενικούς τύπους. Παρουσιάζεται λοιπόν η ισορροπία Nash του παιχνιδιού γενικά με στρατηγική δύο παραμέτρων.

Σύμφωνα με το άρθρο παρατηρούμε πως προσδιορίζοντας ένα στρατηγικό χώρο με μια παράμετρο k η ισορροπία Nash αλλά και γενικότερα οι αντίστοιχες πληρωμές αλλάζουν.

Κεφάλαιο 12

Διανυσματικός χώρος Hilbert

Οι χώροι Hilbert είναι διανυσματικοί χώροι οι οποίοι ως στόχο έχουν την γενίκευση ενός ευκλείδειου χώρου σε ένα άπειρο διανυσματικό χώρο. Ουσιαστικά αποτελούν ένα ειδικό είδος γραμμικών διανυσμάτων. Ένας χώρος Banach είναι ένας κανονικοποιημένος γραμμικός χώρος. Ενώ ένας χώρος Hilbert είναι ένας πλήρης χώρος εσωτερικού γινομένου(inner product).[30]

Οι διανυσματικοί χώροι Hilbert στην ουσία είναι ένα υποσύνολο των κλασσικών διανυσματικών χώρων V έχουν όλες τις κλασσικές ιδιότητες του παραπάνω χώρου και κάποιες επιπλέον.

Οι διανυσματικοί χώροι εσωτερικού γινομένου οι οποίοι είναι και χώροι Hilbert έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες:[31]

Έχουν έσωτερικό γινόμενο, για να μπορέσουμε να πούμε όμως πως είναι ορθό πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:

- Το εσωτερικό γινόμενο $\langle S_1, S_2 \rangle \in \mathbb{C}$ όπου το $\mathbb{C}$ είναι ένα σύνθετο σύνολο.

Σύνθετο σύνολο $\mathbb{C}$ νοείται το σύνολο όλων των ταξινημένων ζευγών $z = \langle a, b \rangle$ όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και ορίζεται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Επίσης υπάρχει απόλυτη τιμή $|z|$ και το συζυγή του z όπου είναι το z^* [32]

- Πρώτον και κύριων, το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του δεν πρέπει να είναι αρνητικός αριθμός.

$$|S, S| = |S|^2 \geq 0$$

- Πρέπει να υπάρχει γραμμικότητα με τα διανύσματα δευτέρου βαθμού. Το εσωτερικό γινόμενο $\langle S_1, S_2 \rangle$ είναι συμμετρικό με το συζυγή σύνθετο εσωτερικό γινόμενο $\langle S_1, S_2 \rangle^*$

- Όμοια και με του πρώτου βαθμού όμως πρέπει να έχουν τη μορφή σύνθετου συζηγούς όταν βγουν από το διάνυσμα.

$$\langle aS_1 + bS_2, S_3 \rangle = a^* \langle S_1, S_3 \rangle + b^* \langle S_2, S_3 \rangle$$

- Η απόσταση ανάμεσα σε δύο διανύσματα μπορεί να βρεθεί με την παρακάτω εξίσωση:

$$|S_2 - S_1| = \sqrt{\langle S_2 - S_1, S_2 - S_1 \rangle} = d$$

Ένας χώρος Hilbert είναι πλήρης cauchy ακολουθία. Τέλος ένας χώρος Hilbert είναι διαχωρίσιμος καθώς εμπεριέχει ένα μετρήσιμο και πυκνό (σχεδόν συνεχή) υποσύνολο. [33] Κάποιοι χώροι Hilbert έχουν χρησιμότητά στη κβαντική Θεωρία οι δύο πιο διαδεδομένοι είναι οι εξής:

- πεπερασμένοι διανυσματικοί χώροι Hilbert
- μη-πεπερασμένοι διανυσματικοί χώροι Hilbert

Όπως θα δούμε παρακάτω, οι χώροι Hilbert έχουν συμβάλει σημαντικά στην επίλυση κβαντικών προβλημάτων και έχουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία παιγνίων. Αρκετές μελέτες συσχετίζουν και παρουσιάζουν το θεώρημα της ισορροπίας Nash σε χώρους Hilbert.

Κεφάλαιο 13

Πληρωμές σε χώρους Hilbert

Σύμφωνα με το άρθρο του Tasku Cheon[34], Θεωρούμε n -διάστατο χώρο Hilbert $\mathcal{H}_a$ και $\mathcal{H}_b$ όπου υπάρχουν δυο παίκτες με στρατηγικές A και B με στρατηγικές $|\alpha\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ και $|\beta\rangle_B \in \mathcal{H}_B$. Ο στρατηγικός χώρος του παιχνιδιού αναπαριστάται από το γινόμενο των δύο υποσυνόλων που ανοίκει ο κάθε παίκτης, επομένως έχουμε $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_B$. Ένα διάνυσμα στο χώρο $\mathcal{H}$ αναπαριστά μια μικτή στρατηγική όπου οι παίκτες μπορούν να γραφούν όπως ακολουθεί:

$$|\alpha, \beta; \gamma\rangle = J(\gamma)|\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B,$$

Όπου ο μοναδιαίος τελεστής $J(\gamma)$ είναι μια κβαντική συσχέτιση ανάμεσα στις ξεχωριστές καταστάσεις των παικτών $|\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B$. Ο τελεστής $J(\gamma)$ είναι ανεξάρτητος από τους παίκτες και τις επιλογές τους και λειτουργεί σαν μια τρίτη συντονιστική οντότητα η οποία δεν συμμετέχει ενεργά στο παιχνίδι.

Από τη στιγμή που μια μικτή στρατηγική προσδιορίζεται με τον τελεστή $J(\gamma)$, οι παίκτες λαμβάνουν πληρωμές οι οποίες δίνονται από τους Hermitian τελεστές A και B .

$$\Pi_A(\alpha, \beta; \gamma) = \langle \alpha, \beta; \gamma | A | \alpha, \beta; \gamma \rangle$$

$$\Pi_B(\alpha, \beta; \gamma) = \langle \alpha, \beta; \gamma | B | \alpha, \beta; \gamma \rangle$$

Και οι δύο παίκτες προσπαθούν να βελτιστοποιήσουν τις στρατηγικές τους προκειμένου να λαμβάνουν το μέγιστο αποτέλεσμα πληρωμής. Ως αποτέλεσμα να μπορούν να βρουν μια κβαντική εκδοχή του θεωρήματος Nash όπου $(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$ στον στρατηγικό χώρο. Οι πληρωμές λοιπόν διαμορφώνονται ως εξής:

$$\delta_\alpha \Pi_A(\alpha, \beta^*; \gamma)|_\alpha^* = 0, \delta_\beta \Pi_B(\alpha^*, \beta; \gamma)|_\beta^* = 0$$

Κάτω από αυθαίρετες παραλλαγές των α, β . Στην συνέχεια εκφράζεται η κάθε στρατηγική ξεχωριστά από την κλασσική της μορφή σε μια

ορθονομική στρατηγική $|i\rangle, i = 1, \dots, n$ η οποία θεωρείται ως κοινή στρατηγική του A και του B .

$$|\alpha\rangle_A = \sum_i \alpha_i |i\rangle_A, |\beta\rangle_B = \sum_i \beta_i |i\rangle_B$$

Όπου οι σύνθετοι αριθμοί α_i, β_i κοινωνικοποιούνται σαν

$\sum_i |\alpha_i|^2 = \sum_i |\beta_i|^2 = 1$. Σε αυτό το σημείο έχουμε τον τελεστή ανταλλαγής (swap) S όπου

$$S|i, j\rangle = |j, i\rangle$$

για τις καταστάσεις $|i, j\rangle = |i\rangle_A |i\rangle_B$ και $S|\alpha, \beta\rangle = |\beta, \alpha\rangle$ για κάθε αποτέλεσμα γενικής διαχωρίσιμης κατάστασης $|\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle_A |\beta\rangle_B$. Επιπρόσθετα έχουμε τους τελεστές C και T όπου

$$C|i, j\rangle = |\bar{i}, \bar{j}\rangle, T|i, j\rangle = |\bar{j}, \bar{i}\rangle,$$

Η γραμμή αναπαριστά τη συζυγή επιλογή. $\bar{i} = (n-1) - i$. Ο τελεστής C είναι μια ταυτόχρονη επικοινωνία μεταξύ των δύο παικτών και T είναι ο συνδυασμός $T = CS$. Οι τελεστές αυτοί, S, C, T επικοινωνούν μεταξύ τους και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

$$S^2 = C^2 = T^2 = I, T = SC, S = CT, C = TS,$$

Όπου I είναι ο τελεστής ταυτότητας (identity). Όλοι οι παραπάνω τελεστές αποτελούν το dihedral σύνολο D_2 . Ορίζουμε τους παρακάτω τελεστές πληρωμών:

$$A(\gamma) = J^\dagger(\gamma) A J(\gamma),$$

$$B(\gamma) = J^\dagger(\gamma) B J(\gamma)$$

Όπου έχουμε $\Pi_A(\alpha, \beta; \gamma) = \langle \alpha, \beta | A(\gamma) | \alpha, \beta \rangle$. Θεωρούμε πως η διαγωνιος του πίνακα πληρωμών δίνεται απο:

$$\Pi_A(\alpha, \beta; 0) = \sum_{i,j} x_i A_{ij} y_j,$$

$$\Pi_B(\alpha, \beta; 0) = \sum_{i,j} x_i B_{ij} y_j$$

Όπου $x_i = |\alpha|^2$ και $y_i = |\beta|^2$ είναι η πιθανότητα να επιλέξει κάποιος τη στρατηγική $|i\rangle_A$ και $|j\rangle_B$. Το παραπάνω σημαίνει πως $\gamma = 0$ και το κβαντικό παιχνίδι έχει γίνει κλασσικό με πίνακα πληρωμής A_{ij} σε μικτή στρατηγική.[34]

Κεφάλαιο 14

ισορροπία Nash σε χώρους Hilbert

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο πολυάριθμες μελέτες χρησιμοποιούν τους χώρους Hilbert προκειμένου να βρουν την ισορροπία Nash. Κάποιες από αυτές θα παρουσιάσουμε συνοπτικά παρακάτω. Την ισορροπία Nash σε Hilbert χώρους τη συναντάμε κυρίως σε κβαντικές μελέτες καθώς οι χώροι Hilbert εκφράζουν πιο ιδανικά τους πολυδιάστατους κβαντικούς χώρους καθώς όπως ήδη αναφέραμε είναι σχεδόν συνεχής και πλήρης διανυσματικοί χώροι.

Στο άρθρο που δημοσίευσε ο Jimenez το 2012 [35] παρουσίασε αναλυτικά την εύρεση της ισορροπίας Nash σε χώρους Hilbert. Απέδειξε λοιπόν, πως η προαναφερθείς ισορροπία έχει δύο ιδιότητες. Η πρώτη είναι πως έχει ένα σταθερό σημείο που μεγιστοποιεί μια συνάρτηση λειτουργίας το οποίο είναι το εξής :

$$< p_{max} | A | p^{max} > \text{ όπου } | p^{max} > = (|x_1^{max}|^2 \dots |x_n^{max}|^2)^*$$

Στους χώρους Hilbert η νόρμα ενός selfadjoint τελεστή (πίνακα χρησιμότητος: A) οδηγεί στα εξής σταθερά σημεία:

$$(|X >) = \frac{A}{\lambda} |X > = |X > \text{ όπου } \|A\| = \max_{\|x\|=1} < x | A | x > = \lambda_{max}$$

Την παραπάνω έρευνα λοιπόν ο Jimenez διατυπώνει και αποδεικνύει τα εξής:

Λήμμα Στο θεώρημα της ισορροπίας Nash για τις μικτές στρατηγικές, το ιδιοδιάνισμα το οποίο μεγιστοποιεί το $< A >_H = < x | A | x >$ μεγιστοποιεί επίσης και την εξής λειτουργικότητά :

$$\max_{\|x\|=1} E(u) = \max < A >_H = < p^{max} | A | p^{max} >$$

$$p^{max} \left(\frac{|x_1^{max}|^2}{|x_n^{max}|^2} \right)$$

Τέλος το παραπάνω άρθρο καταλήγει στα εξής συμπεράσματα:

- ▶ Κάθε φυσική μεταβλητή n οποία αναπαριστάται από έναν hermitian τελεστή, ο κανόνας αυτός επιτρέπει την επίτευξη ισορροπίας Nash σε χώρους Hilbert.
- ▶ Οι Hermitian τελεστές μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο σε συμμετρικά παιχνίδια και αναπαρίστανται από σύνθετο πίνακα.
- ▶ Η μικτή στρατηγική ισορροπία Nash αποτελεί μια συνεργατική λύση σε μη συμμετρικά παιχνίδια.

1. Ισορροπία Nash στο κβαντικό παιχνίδι Κορώνα-Γράμματα

Στη συνέχεια θα παρατεθεί ένα ευρέως διαδεδομένο παιχνίδι το οποίο διατύπωσε ο Mayer το 1999[36]. Το παιχνίδι παίζεται με δύο παίκτες τον Q και τον Picard και ένα νόμισμα είναι γνωστό ως penny flip game PQ ή αλλιώς κορώνα-γράμματα. Ο Picard είναι κλασσικός παίκτης παίζει δηλαδή μόνο προμπαμπλιστικά ενώ ο Q είναι ένας κβαντικός παίκτης. Αναλυτικότερα ο Picard επιτρέπεται να κάνει μόνο δύο κινήσεις:

- ▶ Να παεί πάσο, δηλαδή να μην παίζει και να αφήσει το νόμισμα ως έχει(I από τον identity τελεστή).
- ▶ Να ρίξει το νόμισμα(F από τον Flip τελεστή).

Ο Q όμως έχει τη δυνατότητα να παίζει κβαντικά πράγμα που σημαίνει πως μπορεί να κάνει όλες τις παραπάνω κινήσεις και μια ακόμα. Ο Q μπορεί να εφαρμόσει τον τελεστή H (Handamard). Το παιχνίδι ξεκινά από τον Q πάντα και το νόμισμα έχει αρχική θέση κορώνα. Στη συνέχεια οι γύροι ακολουθούν ως εξής:

1. Παίζει πρώτος ο Q. Εφαρμόζοντας τον τελεστή H .
2. Ακολουθεί ο Picard.
3. Παίζει για τελευταία φορά ο Q. Εφαρμόζοντάς ξανά τον τελεστή H γεγονός που καθιστά την κίνηση του Picard ασήμαντη.

Εδώ παρουσιάζεται ένας πίνακας με τις πληρωμές κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού όπου σημαίνει $F = Flip$ και $N = Non - Flip$

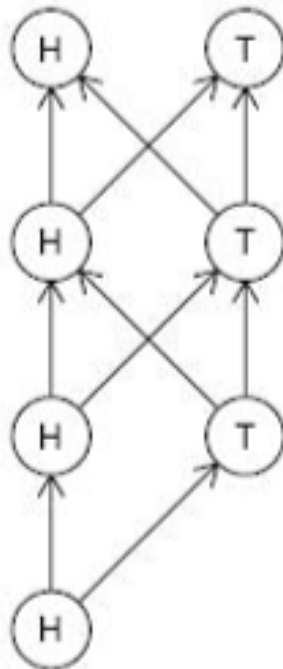
	NN	NF	FN	FF
N	-1	1	1	-1
F	1	-1	-1	1

[37][36]

Ο Q και Picard λοιπόν, παίζουν σε ένα δισδιάστατο χώρο Hilbert ως αποτέλεσμα οι παραπάνω κινήσεις μπορούν να αναπαραστηθούν με 2×2 πίνακες.[12]

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ και } H = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \quad (14.1)$$

Ο Mayer επισημαίνει πως το παιχνίδι αυτό δεν έχει ντετερμινιστική λύση κατά συνέπεια δεν υπάρχει ντετερμινιστική ισορροπία Nash. Πάραυτα όμως το παραπάνω παιχνίδι είναι ένα παιχνίδι δύο παικτών, μηδενικού αθροίσματος και με πεπερασμένο αριθμό στρατηγικών.[37]



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, έχουμε ένα γράφο όπου αναλύεται η έκβαση του παιχνιδιού σε μια πιο επεκτατική μορφή. Σε συνδυασμό λοιπόν με τις δυνατές κινήσεις στο διανυσματικό χώρο V όπου H στη συγκεκριμένη περίπτωση σημαίνει Head(κορώνα) και T Tail(γράμματα). Ο Mayer υποστηρίζει πως μια συγκεκριμένη σειρά από μικτές κινήσεις είναι ικανή να τοποθετήσει το νόμισμα σε ένα κυρτό γραμμικό συνδυασμό

$$aH + (1 - a)T, 1 \geq a \geq 0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ό,τι και να τύχει πλέον κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού το νόμισμα θα είναι πάντα στην κατάσταση κορώνα. Η θεωρία του Dirac για τους κβαντικούς χώρους μας υποδεικνύει πως υπάρχει μια σειρά από μοναδιαίους μετασχηματισμούς οι οποίοι απορροφούν την κίνηση του Picard και τη μετασχηματίζουν με σύζευξη. Επομένως το νόμισμα πάντα καταλήγει σε κορώνα και έχουμε τα εξής ζευγάρια

$$([pF + (1 - p)N], [U(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), U(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})])$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω υφίσταται μια κβαντική ισορροπία του νομίσματος με τιμή -1 για τον Picard που έχει ως αποτέλεσμα την ήττα.

Για να παίξουμε το παραπάνω παιχνίδι είναι προφανές πως χρειαζόμαστε ένα κβαντικό νόμισμα. Αν ο Picard γνώριζε απο την αρχή την ύπαρξη του κβαντικού νομίσματος ίσως να μην είχε δεχθεί να παίξει το παιχνίδι. Λόγο του ότι το νόμισμα είναι κβαντικό προκύπτει μια νέα ισορροπία Nash. Η κβαντική κδοχή του παιχνιδιού βασίζεται στην ταυτόχρονη αλλαγή ανάμεσα σε Κορώνα και Γράμματα και μπορεί να εξηγηθεί λόγω της εφαρμογής του πίνακα Handamard. Πάραυτα έδω δεν έχουμε κβαντική εμπλοκή όπως συμβαίνει στο δίλημά των φυλακισμένων.

Θα βασιστούμε λοιπόν σε μια άλλη πιο ειδική εκδοχή του παραπάνω παιχνιδιού. Σύμφωνα με τον Eisert, Wilkens και Lewenstein [9] υπάρχει κβαντική εμπλοκή για ένα ζευγάρι από νομίσματα και κάθε παίκτης δρα στο δικό του νόμισμα αλλά παράλληλα επηρεάζεται και το άλλο νόμισμα. Οι καταστάσεις των νομισμάτων είναι ίδιες όπως και στο κανονικό παιχνίδι αλλά πλέον είναι εμπλεκόμενες. Επομένως έχουμε την εξής αρχική κατάσταση:

$$H \otimes H + T \otimes T$$

Παίζοντας λοιπόν το παιχνίδι μπορούμε να φτάσουμε στις εξής τέσσερις καταστάσεις σύμφωνα με το άρθρο του Philip Vos Fellman και λοιποί:[37]

- NN Non Flip και τα δύο νομίσματα μένουν ως έχουν.

$$NN = H \otimes H + T \otimes T$$

- NF Non Flip - Flip το δεύτερο νόμισμα εκτελεί κίνηση.

$$F = H \otimes T + T \otimes H$$

- *FN Flip* - Non Flip το πρώτο νόμισμα εκτελεί κίνηση.

$$F = H \otimes T + T \otimes H$$

- *FF Flip* - Flip και τα δύο νομίσματα εκτελούν κίνηση.

$$FF = H \otimes H + T \otimes T$$

Οι παραπάνω καταστάσεις μπορούν να χαρτογραφηθούν σε χώρους Hilbert καθώς έχουμε ένα σύνολο απο στρατηγικούς χώρους. Επομένως προκύπτει μια νέα κβαντική πλέον ισορροπία Nash.

2. Ισορροπία Nash στο Δίλημμα των φυλακισμένων

Στο κεφάλαιο 7 περιγράψαμε συνοπτικά το παιχνίδι των φυλακισμένων και θίξαμε το γεγονός της κβαντικής του εκδοχής. Παρακάτω θα δούμε σε μια πιο εκτενή μορφή την κβαντική ισορροπία Nash που υφίσταται κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού των φυλακισμένων σε χώρους Hilbert σύμφωνα με το άρθρο που έγραψε οι Taksu και λοιποί, το 2005.[38] Το κβαντικό παιχνίδι χωρίζεται σε δύο μέρη:

- Το πρώτο εμπεριέχει τα κλασσικά παιχνίδια.
- Το δεύτερο εμπεριέχει όλα εκείνα τα συστατικά που μετατρέπουν ένα κλασσικό παιχνίδι σε κβαντικό.

Το δεύτερο μέρος υποδηλώνει μια κβαντική εκδοχή των κλασσικών παιχνιδιών με παραπάνω κινήσεις που επιτρέπει ο κβαντικός κόσμος, σε διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους από τους κλασσικούς αλλά και ίσως διαφορετικά αντικείμενα πλέον από τα κλασσικά. Όπως είδαμε για παράδειγμα παραπάνω στο παιχνίδι Κορώνα γράμματα το νόμισμα που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού δεν ήταν ένα κλασσικό νόμισμα ήταν ένα κβαντικό νόμισμα.

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω μελέτη παρατηρούμε πως υπάρχει μια περίπτωση στη διάρκεια ενός κβαντικού παιχνιδιού κατά την οποία αν χωρίσουμε το πλήρωμα (payoff) σε δύο συστατικά διαπιστώνουμε πως είναι δυνατόν να επιτευθεί ισορροπία Nash. Στην ουσία το πρώτο συστατικό εμπεριέχει μια μίξη στρατηγικών. Στην ουσία παίζουμε το ίδιο κλασσικό παιχνίδι παράλληλα με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Συνδυάζουμε την κλασσική στρατηγική του παιχνιδιού με την αλτρουιστική στρατηγική SAS και τη στρατηγική αλλαγής αξίας CAC.

Παρατηρούμε όμως από τα παραπάνω πως με λίγο συντονισμό (tunning) των παραμέτρων κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, το κβαντικό παιχνίδι αποτελείται εν τέλη από μια οικογένεια κλασσικών παιχνιδιών τα οποία εμπεριέχουν το αρχικό αυθεντικό παιχνίδι. Το δεύτερο συστατικό στην

προκειμένη περίπτωση είναι το κβαντικό στοιχείο το οποίο προκύπτει κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού όταν οι δύο παίκτες υιοθετούν κβαντικές στρατηγικές. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τη δομή Π_A^{in} η οποία εισάγει έναν όρο που δεν μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα κλασσικό παιχνίδι και αφορά το συνδυασμό κλασσικών και κβαντικών στρατηγικών επομένως αναπαριστά την κβαντική εκδοχή του παιχνιδιού.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να βρούμε μια στατηγική ισορροπίας Nash μόνο αν λάβουμε υπόψη την παραπάνω πληρωμή. Έστω λοιπόν σύμφωνα με το άρθρο [38] πως έχουμε δύο παίκτες που ο καθένας ξεχωριστά παίζει σε ένα χώρο Hilbert προκύπτει το εξής, H_A ο χώρος στον οποίο παίζει ο A και ο χώρος στον οποίο παίζει ο B . Ολόκληρος ο Hilbert χώρος του παιχνιδιού είναι ο $H = H_A \times H_B$. Ως $J_{(\gamma)}$ θεωρείται η συσχέτιση κβαντικής εμπλοκής. Εδώ είναι απαραίτητο να σημειώσουμε πως το $J_{(\gamma)}$ είναι ανεξάρτητο από τους παίκτες καθώς αναφέρεται σε ένα τρίτο εξωτερικό παράγοντα που είναι ο συντονιστής *coordinator*.

Σύμφωνα λοιπόν με το παραπάνω άρθρο [38] οι πληρωμές έχουν την εξής μορφή:

$$\Pi_A(\alpha, \beta; \gamma) = \langle \alpha, \beta; \gamma | A | \alpha, \beta; \gamma \rangle$$

$$\Pi_B(\alpha, \beta; \gamma) = \langle \alpha, \beta; \gamma | B | \alpha, \beta; \gamma \rangle$$

Κάθε παίκτης προσπαθεί να βελτιστοποιήσει τη στρατηγική του προκειμένου να βελτιστοποιήσει τις πληρωμές του. Σκοπός λοιπόν είναι να βρεθεί το παρακάτω:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha^*, \beta^*)$$

Σε ένα χώρο στρατηγικό όπου το μέγιστο των παραπάνω πληρωμών είναι το εξής:

$$\delta_\alpha \Pi_A(\alpha, \beta^*; \gamma) |_{\alpha^*} = 0$$

$$\delta_\beta \Pi_B(\alpha^*, \beta; \gamma) |_{\beta^*} = 0$$

σε αυθέρητη μεταβολή των α και β .

Θέτοντας ως στόχο λοιπόν τα παραπάνω Θεωρούμε ως γ το δίλημμα των φυλακισμένων. Στον παρακάτω πίνακα σύμφωνα με τους Taksu και λοιποί, παρατίθεται η ισορροπία Nash του προαναφερθείς παιχνιδιού.

Table 1

The quantum Nash equilibria with edge strategies. The conditions for their appearance and their maximal payoffs under variations of γ are shown

$ \alpha^*, \beta^*\rangle$	$ 0, 0\rangle$	$ 1, 1\rangle$	$ 0, 1\rangle$	$ 1, 0\rangle$
Condition	$H_+ > 0$	$H_- > 0$	$H_+ < 0$ $H_- < 0$	$H_+ < 0$ $H_- < 0$
$\text{Max}(\Pi_A^*)$	A_{00}	A_{00}	A_{11}	$A_{01} + A_{10} - A_{11}$
$\text{Max}(\Pi_B^*)$	A_{00}	A_{00}	$A_{01} + A_{10} - A_{11}$	A_{11}

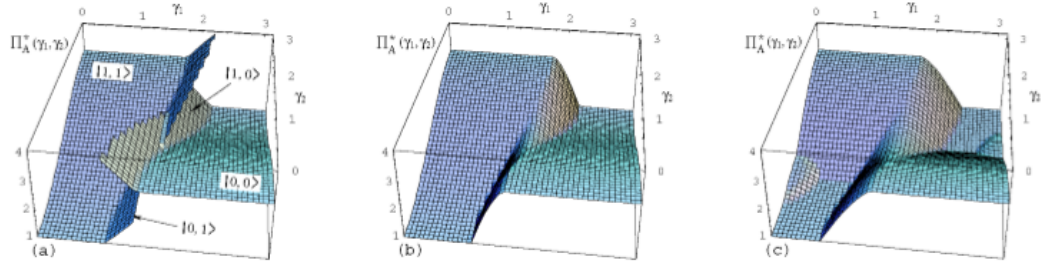


Fig. 1. The quantum Nash equilibrium payoff $\Pi_A^*(\gamma) = \Pi_A(\alpha^*, \beta^*; \gamma)$ (or $\Pi_A(P_A^*, P_B^*; \gamma)$ for mixed quantum strategies) as a function of γ . Only the region $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, \pi]$ is shown since $\Pi_A^*(\gamma)$ has the reflection invariance $\Pi_A^*(2\pi - \gamma_1, \gamma_2) = \Pi_A^*(\gamma_1, 2\pi - \gamma_2) = \Pi_A^*(\gamma_1, \gamma_2)$. The extra invariance $\Pi_A^*(\pi - \gamma_1, \pi - \gamma_2) = \Pi_A^*(\gamma_1, \gamma_2)$ is also visible. (a) Edge state Nash equilibria for $A_{00} = 3, A_{01} = 0, A_{10} = 5$ and $A_{11} = 1$. The value $(\gamma_1, \gamma_2) = (0.9272, 0)$ gives the maximum payoff $\Pi_A^* = 4$ for one of the players. (b) Symmetric mixed quantum Nash equilibrium with the same parameters as (a). The maximum payoff $\Pi_A^* = 3$ is obtained at $\gamma_2^* = 0$ and $1.3694 \leq \gamma_1^* < \pi$. (c) Mixed Nash equilibrium for $A_{00} = 3, A_{01} = 0, A_{10} = 5$ and $A_{11} = 0.2$. The two bumps near the left and right ends are due to the pure symmetric Nash equilibria (20).

[38]

Παρατηρούμε από το παραπάνω σχήμα πως η μη-συμμετρική ισορροπία Nash συνυπάρχει στη μεσαία λωρίδα που χωρίζει τα δύο πεδία όπου εμφανίζεται συμμετρική ισορροπία Nash. Η μέγιστη πληρωμή για τον παίκτη A επιτυγχάνεται από τη στρατηγική ισορροπίας $|1, 0\rangle$ σε μια βελτιστοποιημένη επιλογή

$$(\gamma_1^*, \gamma_2^*) = (2\arcsin\sqrt{\lambda}, 0)$$

και στο συμμετρικό συμπαίκτη του όπου είναι $|0, 1\rangle$ σε

$$(\pi - 2\arcsin\sqrt{\lambda}, \pi)$$

όπου

$$\lambda = \frac{(A_{11} - A_{01})}{(A_{10} - A_{01})}$$

Στην παραπάνω περίπτωση η πληρωμή είναι καλύτερη από οποιαδήποτε άλλη επιλογή του παίκτη να ομολογήσει $|0, 0\rangle$ ή να αρνηθεί $|1, 1\rangle$. Η βέλτιστη ισορροπία όπως προκύπτει παραπάνω δεν αποτελεί την επιθυμητή λύση του παιχνιδιού καθώς θεωρεί πως ο παίκτης B έχει το μικρότερο πλήρωμα (payoff).

Εδώ λοιπόν επεμβαίνει η μεταβλητή που παρουσιάσαμε παραπάνω η Π_A^{in} όπου σύμφωνα με το άρθρο [38], προκύπτει η εξής συμμετρική λύση:

$$\alpha_0^* = b_0^* = \left(\frac{H_{-\gamma} - \Delta_\gamma}{H_{+\gamma} + H_{-\gamma} - 2\Delta_\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

το οποίο είναι ορθό διότι,

$(0 \leq \alpha_0^* \leq 1)$ αν $(H_+ - \Delta) \geq 0$. Επομένως δεν υπάρχει ασύμμετρη ισορροπία Nash εκτός από των δύο άκρων.

Συμπερασματικά λοιπόν βλέπουμε πως, μια πληρωμή μικτής ισορροπίας Nash για το παιχνίδι των φυλακισμένων παρατηρείται σαν μια συνάρτηση της (γ) . Στη μεσαία λωρίδα της ασύμμετρης ισορροπίας όπου κανονικά υπάρχει αστάθεια τώρα παρατηρείται με βάση τους Taksu και λοιποί, πως η παραπάνω αστάθεια έχει αντικατασταθεί από τα σημεία της μικτής ισορροπίας Nash όπου δίνονται από την $\Delta(\gamma) = 0$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω παρατηρούμε πως με το συνδυασμό στρατηγικών κυρίως κλασσικών και με τη συμμετοχή κβαντικών κινήσεων και προϋποθέσεων μπορούν να βρεθούν συγκεκριμένοι στρατηγικοί χώροι όπου υφίσταται η ισορροπία Nash. Τη παραπάνω μελέτη έχει χρησιμοποιήσει και οι Fellman και λοιποί, στο άρθρο τους προκειμένου να δείξει τη κβαντική ισορροπία Nash στο παιχνίδι Κορώνα γράμματα που παρουσιάσαμε παραπάνω. Επιπρόσθετα η παραπάνω θεωρία βρίσκει εφαρμογή και σε άλλα παιχνίδια όπως είναι το πέτρα-ψαλίδι-χαρτί του οποίου παρουσιάσαμε αναλυτικά την κλασσική του μορφή στο κεφάλαιο 8.

Βλέποντας λοιπόν τη θεωρία της ισορροπίας Nash στον κβαντικό κόσμο μέσα σε χώρους Hilbert παρατηρούμε πως ο σκοπός της παραμένει ίδιος. Δηλαδή οι παίκτες προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν τις πληρωμές τους και κανένας δεν έχει όφελος παρεκκλίνοντας από μια τέτοιου είδους στρατηγική. Πάραυτα μια ισορροπία Nash δεν είναι εύκολο να βρεθεί σε μια καθαρή μορφή στον κβαντικό κόσμο όπως στον κλασσικό (pure nash equilibrium). Επομένως πρέπει ο παίκτης να χρησιμοποιήσει μια μικτή στρατηγική συνδυάζοντας πολλές κλασσικές στρατηγικές αλλά και κβαντικές μαζί προκειμένου να ανακαλύψει εκείνο το στρατηγικό χώρο που θα τον οδηγήσει σε μικτή πλέον ισορροπία Nash.

Κεφάλαιο 15

Ισορροπία σε χώρους Hilbert

Li Yang και οι λοιποί έγραψαν ένα άρθρο το 2008 στο οποίο διατύπωσαν και απέδειξαν τα θεωρήματα που θα παρατεθούν παρακάτω προκειμένου να βρεθεί ισορροπία σε προβλήματα τα οποία ανάγονται σε χώρους Hilbert. Τα παρακάτω θεωρήματα μπορούν να εφαρμοστούν και σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις για την εύρεση της ισορροπίας Nash.[39]

Θεώρημα 1 [39]

H είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert, C είναι ένα μη-κενό κυρτό υποσύνολο του H , $\Phi : C \times C \rightarrow R$ είναι μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $(A_1) - (A_4)$, $T : C \rightarrow H$ είναι μια επεκτεινόμενη απεικόνιση με $F(T) \cap EP(\phi) \neq \emptyset$ και $f : H \rightarrow H$ είναι μια αντίθετη απεικόνιση με συνεκτική σταθερά $\alpha \in (0, 1)$. a_n είναι μια ακολουθία $(0, 1]$ και $r_n \subset (0, \infty)$ είναι μια πραγματική ακολουθία ικανοποιώντας τις παρακάτω συνθήκες:

- $\alpha_n \rightarrow 0$; $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$; $|1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_n + 1}| \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$
- $0 < r < r_n$ για κάθε $n \geq 0$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |r_n - r_{n+1}| < \infty$

όπου r είναι μια θετική σταθερά. Για κάθε δοσμένο αριθμό $x_0 \in H$, x_n και u_n είναι ακολουθίες καθορισμένες απο

$$\begin{cases} \phi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C \\ x_{n+1} = a_n f(u_n) + (1 - a_n) T u_n \end{cases}$$

για κάθε $n \geq 0$. Τότε $x_n \rightarrow x_* \in F(T) \cap EP(\phi)$, όπου $x_* = P_{F(T) \cap EP(\phi)} f(x_*)$.

Θεώρημα 2 [39]

είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert, C είναι ένα μη-κενό κυρτό υποσύνολο του H , $T : C \rightarrow H$ είναι μια μη-επεκτεινόμενη απεικόνιση με

$F(T) \neq 0$ και $f : H \rightarrow H$ είναι μια συνεκτική σταθερά $\alpha \in (0, 1)$. Όπου a_n είναι μια ακολουθία $[0, 1]$ ικανοποιώντας τις παρακάτω συνθήκες:

$$\alpha_n \rightarrow 0; \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty; |1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}| \rightarrow 0.$$

Για κάθε $x_0 \in H$, x_n είναι μια ακολουθία ορισμένη από

$$x_{n+1} = \alpha_n f(u_n) + (1 - \alpha_n)T(u_n), \forall n \geq 0,$$

όπου $x_n \rightarrow x^* \in F(T)$ καθώς $n \rightarrow \infty$ όπου $x_* = P_{F(T)}f(x_*)$.

Θεώρημα 3 [39]

H είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert, C είναι ένα μη κενό κυρτό υποσύνολο του H , $\phi : C \times C \rightarrow R$ είναι μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες $(A_1 - A_4)$ τέτοιες ώστε $EP(\phi) \neq 0$ και $f : H \rightarrow H$ είναι μια απεικόνιση με μια συνεκτική σταθερά $\alpha \in (0, 1)$. α_n είναι μια ακολουθία μέσα σε $(0, 1]$ και $r_n \subset (0, \infty)$ είναι μια ακολουθία που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- $\alpha_n \rightarrow 0; \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty; |1 - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}| \rightarrow 0;$
- $0 < r < r_n$ για κάθε $n \geq 0$ και $\sum_{n=0}^{\infty} |r_n - r_{n+1}| < \infty$.

Για κάθε $x_0 \in H$, x_n και u_n είναι ακολουθίες οι οποίες ορίζονται από

$$\begin{cases} \phi(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \forall y \in C \\ x_{n+1} = \alpha_n f(u_n) + (1 - \alpha_n)u_n \end{cases}$$

για κάθε $n \geq 0$. Τότε $x_n \rightarrow x_* \in EP(\phi)$ καθώς $n \rightarrow \infty$, όπου $x_* = P_{EP(\phi)}f(x_*)$

Κεφάλαιο 16

Ισορροπία Nash σε χώρους Banach

Όπως ήδη έχει γίνει σαφές μέσα από την παρούσα πτυχιακή το θεώρημα ισορροπίας που διατύπωσε ο Nash έχει απασχολήσει αρκετά την επιστημονική κοινότητα και ιδιαίτερα τον κλάδο της θεωρίας παιγνίων. Οι επιστήμονες θεωρούν πως η ισορροπία Nash αποτελεί σημαντικό στοιχείο στον τρόπο εξέλιξης ενός παιχνιδιού αλλά και στην επιλογή μιας στρατηγικής. Ήδη μέχρι τώρα έχουμε δει εκφάνσεις του θεωρήματος στον κλασσικό κόσμο αλλά και στον κβαντικό. Μια άλλη προσέγγιση του θεωρήματος θα παρατεθεί παρακάτω, παρουσιάζοντας μελέτες που έχουν γίνει προκειμένου να εκφραστεί η ισορροπία Nash σε χώρους Banach.

Παρακάτω παρατίθενται κάποια σημαντικά θεωρήματα των Rodica Branzei [40] και λοιπών. Όπου σε μελέτη που έκαναν παραθέτουν μια νέα εκδοχή της θεωρίας σταθερού σημείου kakutani [22] σε χώρους Banach. Αποδεικνύουν κάποια θεωρήματα σταθερού σημείου τα οποία χρησιμοποιούν αργότερα για την εύρεση σημείων ισορροπίας Nash σε μη-συνεργατικά παιχνίδια.

1. Θεωρήματα σταθερού σημείου σε χώρους Banach

V είναι ένας πραγματικός χώρος Banach και για $F : X \rightarrow X$ με $X \subseteq V$, το σύνολο $x \in V | d(x, F(x)) = \inf_{y \in F(x)} \|y - x\| \leq \epsilon$ από τα ϵ -σταθερά σημεία της πολύ-λειτουργικής συνάρτησης F στο X όπου ορίζεται ως $FIX^\epsilon(F)$.

Θεώρημα 1 [40]

Έστω V ένας αντικατοπτριστικός χώρος Banach και X είναι ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του V με μη-κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε πως $F : X \rightarrow X$ είναι μια ασθενώς κλειστά πολύ-λειτουργικής συνάρτησης

έτσι ώστε $F(x)$ να είναι μη-κενό και κυρτό υποσύνολο του X για κάθε $x \in X$. Τότε $FIX^\epsilon(F) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$.

Θεώρημα 2 [40]

Έστω V ένας αντικατοπτριστικός και διαχωρίσιμος χώρος Banach και X είναι ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του V με μη-κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε πως $F : X \rightarrow X$ είναι μια ασθενώς άνω κλειστά ήμι-συνεχής πολύ-λειτουργική συνάρτηση έτσι ώστε $F(x)$ να είναι μη-κενό και κυρτό υποσύνολο του X για κάθε $x \in X$. Τότε $FIX^\epsilon(F) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$.

Θεώρημα 3 [40]

Έστω V ένας πραγματικός χώρος Banach και X είναι ένα εντελώς κλειστό και κυρτό υποσύνολο του V με μη-κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε πως $F : X \rightarrow X$ είναι μια ασθενώς άνω κλειστά ήμι-συνεχής πολύ-λειτουργική συνάρτηση έτσι ώστε $F(x)$ να είναι μη-κενό και κυρτό υποσύνολο του X για κάθε $x \in X$. Τότε $FIX^\epsilon(F) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$.

Θεώρημα 4 [40]

Έστω X ένα κυρτό υποσύνολο με μη-κενό εσωτερικό που εμπεριέχει και το 0 , από έναν αντικατοπτριστικό χώρο Banach. Υποθέτουμε πως $F : X \rightarrow X$ είναι μια ασθενώς κλειστά πολύ-λειτουργική συνάρτηση έτσι ώστε $F(x)$ να είναι μη-κενό και κυρτό υποσύνολο του X για κάθε $x \in X$. Τότε $FIX^\epsilon(F) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$.

Θεώρημα 5 [40]

Έστω X ένα κυρτό υποσύνολο με μη-κενό εσωτερικό που εμπεριέχει και το 0 , από έναν αντικατοπτριστικό και διαχωρίσιμο χώρο Banach. Υποθέτουμε πως $F : X \rightarrow X$ είναι μια ασθενώς κλειστά πολύ-λειτουργική συνάρτηση έτσι ώστε $F(x)$ να είναι μη-κενό και κυρτό υποσύνολο του X για κάθε $x \in X$. Τότε $FIX^\epsilon(F) \neq \emptyset$ για κάθε $\epsilon > 0$.

2. Ισορροπία Nash

Η ισορροπία Nash για n -παικτών μη-συνεργατικά παιχνίδια βασίζεται πάνω στο θεώρημα σταθερού σημείου kakutani. Το οποίο αποδεικνύει πως υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας Nash σε μικτές εκδοχές παιχνιδιών με n -παίκτες τα οποία είναι μη-συνεργατικά. Το σύνολο των καλύτερων απαντήσεων του καρτεσιανού γινομένου της στρατηγικής που αναπτύσσεται μέσα από τις πολύ-λειτουργικές συναρτήσεις για κάθε παίκτη έχει σταθερά σημεία τα οποία συμπίπτουν με εκείνα της ισορροπίας Nash του παιχνιδιού.[40]

Πολλά μη συνεργατικά παιχνίδια δεν έχουν ισορροπία Nash. Στην περίπτωση του προαναφερθέντος άρθρου μας ενδιαφέρουν τα παιχνίδια στα οποία υπάρχει μια ϵ -Nash ισορροπία για κάθε $\epsilon > 0$.

ϵ -Nash ισορροπία υπάρχει όταν για κάθε διαφοροποίηση των στρατηγικών ανάμεσα στους παίκτες η πληρωμή δεν αυξάνει περισσότερο από ϵ . [40]

Σύμφωνα με το κείμενο μπορούμε υπολογίσουμε τα σημεία ισορροπίας Nash ακολουθώντας τα εξής βήματα:

- Κατασκευάζοντας ένα ϵ -σταθερό σημείο και βρίσκοντας συνθήκες πάνω στους στρατηγικούς χώρους και τις πληρωμές των οποίων το σύνολο των ϵ -καλύτερων απαντήσεων ικανοποιεί τις συνθήκες ενός από τα θεωρήματα των ϵ -σταθερών σημείων όπως περιγράφηκαν παραπάνω.
- προσθέτοντας περισσότερες συνθήκες στις συναρτήσεις πληρωμών, εγγυώντας τα σημεία του καρτεσιανού γινομένου των κοντινών στρατηγικών χώρων έχουν το ένα με το άλλο πληρωμές οι οποίες είναι ικανοποιητικά κοντά.

Σύμφωνα με το άρθρο παρουσιάζεται μια πρόταση-κλειδί όπως αποκαλείται η οποία οδηγεί στα παραπάνω θεωρήματα ϵ -σταθερών σημείων.

Πρόταση-κλειδί [40] Έστω $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n, u_1, \dots, u_n \rangle$ είναι ένα στρατηγικό παιχνίδι με n -παίκτες με τις εξής τρεις ιδιότητες:

- Για κάθε $i \in N = 1, \dots, n$, ο στρατηγικός χώρος X_i έχει ένα μετρικό στοιχείο d_i .
- Οι συναρτήσεις πληρωμών $u_1, \dots, u_n$ είναι ομοιόμορφες συνεχείς συναρτήσεις στο $X = \prod_{i=1}^n X_i$, όπου X εμπεριέχει το μετρικό στοιχείο d που ορίζεται από:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \text{ για κάθε } x, y \in X;$$
- Για κάθε $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$, το άθροισμα της πολύ-λειτουργικής συνάρτησης των ϵ -καλύτερων απαντήσεων B^ϵ έχει τουλάχιστον ένα δ -σταθερό σημείο ($FIX^\delta(B^\epsilon) \neq \emptyset$)

Επομένως χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση πολλά από τα θεωρήματα ισορροπίας Nash μπορούν να εξασφαλισθούν.

Κεφάλαιο 17

Συμπεράσματα

Είναι σαφές μέσα από τα πλαίσια της παραπάνω πτυχιακής πως η θεωρία παιγνίων έχει απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα για αρκετές δεκαετίες. Σήμερα έχει προχωρήσει ένα βήμα έξω από τον κλασσικό κόσμο ανοίγοντας δρόμο σε νέες ανακαλύψεις σε χώρους που δεν έχουμε εξερευνήσει έως σήμερα.

Στο πρώτο μέρος λοιπόν της παρόντος πτυχιακής εργασίας, εξετάζονται οι βασικές έννοιες του παιχνιδιού. Παρουσιάζεται αναλυτικά τι είναι ένα παιχνίδι και ποια τα διακριτά του μέρη. Εν συνεχεία γίνεται κατηγοριοποίηση των παιχνιδιών και έρχεται στο επίκεντρο ένα από τα πιο βασικά και αναπόσπαστα μέρη του, η στρατηγική.

Ορίζεται, λοιπόν η έννοια της στρατηγικής και η έννοια της κυριαρχίας. Στη συνέχεια γίνεται μια εισαγωγή του αναγνώστη στα μη-συμβατικά παιχνίδια και στην έννοια των κβαντικών παιχνιδιών.

Βασικό όμως πυλώνα του συγγράμματος αποτελεί η ισορροπία Nash. Στην οποία και θα βασιστούν τα συμπεράσματα της παραπάνω πτυχιακής εργασίας. Ο αναγνώστης συνειδητοποιεί πως η ισορροπία Nash αποτελεί βάση των στρατηγικών των παιχνιδιών. Μέσω του εν λόγω θεωρήματος του Nash, οι παίκτες διαμορφώνουν στρατηγικές μέσα σε μη-συνεργατικά παιχνίδια οι οποίες εν τέλη να πρέπει να καταλήξουν συνεργατικές καθώς το παιχνίδι φτάνει σε σημείο που κανείς δεν χάνει αλλά ούτε και κερδίζει. Επιφέρεται λοιπόν, ακούσια ίσως πολλές φορές συνεργασία ανάμεσα στους παίκτες κατά τη διάρκεια ενός παιχνιδιού όπου θα εμφανιστεί ισορροπία Nash.

Όπως διαπιστώσαμε το θεώρημα ισορροπίας που διατύπωσε ο Nash έχει αποτελέσει πεδίο έρευνας και για μη-συμβατικά παιχνίδια. Τέτοια παιχνίδια είναι όλα εκείνα που ανοίκουν στον κβαντικό κόσμο. Όταν έχουμε ισορροπία Nash σε ένα κλασσικό παιχνίδι είναι πολύ πιθανό να υφίσταται και σε ένα κβαντικό.

Αρκετοί επιστήμονες έχουν εντοπίσει σύνδεση μεταξύ κλασσικών

και κβαντικών παιχνιδιών, ενώ δεν είναι λίγοι εκείνοι που έχουν προσπαθήσει να εκφράσουν την ισορροπία αυτή και στον κβαντικό κόσμο. Παρατηρείτε λοιπόν, πως ο Nash βάσισε τη θεωρία του πάνω στη θεωρία σταθερού σημείου. Η οποία αποτελεί κομβικό σημείο για τη μετάβαση από ένα συμβατικό διανυσματικό χώρο σε ένα μη συμβατικό.

Συνάγεται, πως μέσα απο τα ήδη υπάρχοντα θεωρήματα και με τις κατάλληλες μετατροπές, ο κλασσικός κόσμος μπορεί να μετατραπεί σ' έναν άλλον μη συμβατικό κόσμο, με διαφορετικούς κανόνες και στρατηγικές.

Βιβλιογραφία

- [1] B. Suits, “What is a game?,” *Philosophy of Science*, vol. 34, no. 2, pp. 148–156, 1967.
- [2] A. K. Dixit and S. Skeath, *Games of Strategy: Fourth International Student Edition*. WW Norton & Company, 2015.
- [3] S.-F. Cheng, D. M. Reeves, Y. Vorobeychik, and M. P. Wellman, “Notes on equilibria in symmetric games,” 2004.
- [4] B. L. Slantchev, “Game theory: Dominance, nash equilibrium, symmetry,” *Department of Political Science, University of California–San Diego*, 2008.
- [5] M. P., *Introduction to Game Theory*. Springer, New York, NY, 1994.
- [6] B. M., *Eatwell J., Milgate M., Newman P. (eds) Game Theory*. Palgrave Macmillan, London, 1989.
- [7] J. Nash, “Non-cooperative games,” *Annals of mathematics*, pp. 286–295, 1951.
- [8] P. K. Dutta and P. K. Dutta, *Strategies and games: theory and practice*. MIT press, 1999.
- [9] J. Eisert, M. Wilkens, and M. Lewenstein, “Quantum games and quantum strategies,” *Physical Review Letters*, vol. 83, no. 15, p. 3077, 1999.
- [10] S. C. Benjamin and P. M. Hayden, “Multiplayer quantum games,” *Physical Review A*, vol. 64, no. 3, p. 030301, 2001.
- [11] T. Cheon, “Altruistic contents of quantum prisoner’s dilemma,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 69, no. 2, p. 149, 2004.
- [12] T. Andronikos, A. Sirokofskich, K. Kastampolidou, M. Varvouzou, K. Giannakis, and A. Singh, “Finite automata capturing winning sequences for all possible variants of the pq penny flip game,” *Mathematics*, vol. 6, no. 2, p. 20, 2018.
- [13] J. S. Bell and J. S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy*. Cambridge university press, 2004.

- [14] T. Cheon and A. Iqbal, “Bayesian nash equilibria and bell inequalities,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 77, no. 2, p. 024801, 2008.
- [15] A. Brandenburger, “The relationship between quantum and classical correlation in games,” *Games and Economic behavior*, vol. 69, no. 1, pp. 175–183, 2010.
- [16] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, “Quantum entanglement,” *Reviews of modern physics*, vol. 81, no. 2, p. 865, 2009.
- [17] J.-P. Benoit, V. Krishna, *et al.*, “Finitely repeated games,” 1984.
- [18] J. Nash, “Non-cooperative games,” *Annals of mathematics*, pp. 286–295, 1951.
- [19] J. F. Nash *et al.*, “Equilibrium points in n-person games,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 36, no. 1, pp. 48–49, 1950.
- [20] B. D. Bernheim, B. Peleg, and M. D. Whinston, “Coalition-proof nash equilibria i. concepts,” *Journal of Economic Theory*, vol. 42, no. 1, pp. 1–12, 1987.
- [21] M. A. M. Ferreira, M. Andrade, M. C. Peixoto Matos, J. A. Filipe, and M. P. Coelho, “Minimax theorem and nash equilibrium,” *International Journal of Latest Trends in Finance and Economic Sciences*, vol. 2, no. 1, 2012.
- [22] S. Kakutani *et al.*, “A generalization of brouwer’s fixed point theorem,” *Duke mathematical journal*, vol. 8, no. 3, pp. 457–459, 1941.
- [23] M. S. Χατζάκου and M. S. Chatzakou, “θεώρημα σταθερού σημείου του brouwer και εφαρμογές,” B.S. thesis, 2014.
- [24] I. L. Glicksberg, “A further generalization of the kakutani fixed point theorem, with application to nash equilibrium points,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 3, no. 1, pp. 170–174, 1952.
- [25] S. E. Landsburg, “Quantum game theory,” *Notices of the AMS*, vol. 51, no. 4, pp. 394–399, 2004.
- [26] A. P. Flitney and L. C. Hollenberg, “Nash equilibria in quantum games with generalized two-parameter strategies,” *Physics Letters A*, vol. 363, no. 5-6, pp. 381–388, 2007.
- [27] J. Du, X. Xu, H. Li, X. Zhou, and R. Han, “Nash equilibrium in the quantum battle of sexes game,” *arXiv preprint quant-ph/0010050*, 2000.
- [28] B. He, “Villager’s dilemma,” *arXiv preprint arXiv:0903.0126*, 2009.
- [29] J. Du, X. Xu, H. Li, X. Zhou, and R. Han, “Playing prisoner’s dilemma with quantum rules,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 2, no. 04, pp. R189–R203, 2002.

- [30] J. Klipfel, “A brief introduction to hilbert space and quantum logic,”
- [31] S. B. Μάης and S. B. Mais, “Ορθογωνιότητα σε χώρους hilbert,” B.S. thesis, 2012.
- [32] C. Bylinski, “The complex numbers,” *Def*, vol. 7, no. 1C, p. 1, 1990.
- [33] N. Young, *An introduction to Hilbert space*. Cambridge university press, 1988.
- [34] T. Cheon, “Game theory formulated on hilbert space,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 864, pp. 254–260, AIP, 2006.
- [35] E. H. Jimenez, “Hidden optimal principle in quantum mechanics and quantum chemistry,” *International Journal of Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 2, no. 4, pp. 51–60, 2012.
- [36] D. A. Meyer, “Quantum strategies,” *Physical Review Letters*, vol. 82, no. 5, p. 1052, 1999.
- [37] P. V. Fellman and J. V. Post, “Quantum nash equilibria and quantum computing,” in *Unifying Themes in Complex Systems*, pp. 454–461, Springer, 2010.
- [38] T. Cheon and I. Tsutsui, “Classical and quantum contents of solvable game theory on hilbert space,” *Physics Letters A*, vol. 348, no. 3-6, pp. 147–152, 2006.
- [39] L. Yang, J.-A. Liu, and Y.-X. Tian, “Proximal methods for equilibrium problem in hilbert spaces,” *Mathematical Communications*, vol. 13, no. 2, pp. 253–263, 2008.
- [40] R. Brânzei, J. Morgan, V. Scalzo, and S. Tijs, “Approximate fixed point theorems in banach spaces with applications in game theory,” *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 285, no. 2, pp. 619–628, 2003.

